

**Über die Konstruktion höherer
arithmetischer Ordinalzahloperationen
nach SAARNIO**

Fred Kröger

1971

Über die Konstruktion höherer arithmetischer
Ordinalzahloperationen nach SAARNIO

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung der Doktorwürde
der Fakultät für Mathematik
der Ludwig-Maximilians-Universität
München

vorgelegt von
Fred Kröger
München, Mai 1971



Berichterstatter: Prof. Dr. Kurt Schütte

Priv.-Doz. Dr. Justus Diller

Mündliche Prüfung: 13. Juli 1971

Inhalt

	Seite
Einleitung	3
§1. Ein System arithmetischer Operationen	5
§2. Hauptzahlen	10
§3. Vergleich mit den FINSLERSchen Operationen	16
§4. Die SAARNIOSchen einstelligen Operationen	18
§5. Die SAARNIOSchen mehrstelligen Operationen	24
§6. Ein Operationensystem mit variabler Grundzahl	29
§7. Darstellung von Ordinalzahlen	35
Literaturverzeichnis	40



Digitized by the Internet Archive
in 2026

Einleitung

Der Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit ist ein 1967 von SAARNIO [4] aufgestelltes System höherer arithmetischer Operationen für Ordinalzahlen der zweiten Zahlenklasse, das zur konstruktiven Darstellung von Ordinalzahlen benutzt wird. Schon 1950 hat FINSLER [2] eine andersgeartete transfinite Folge arithmetischer Operationen beschrieben. In beiden Systemen lassen sich die Zahlen eines gewissen Abschnitts der zweiten Zahlenklasse durch kleinere Zahlen darstellen. Bei den FINSLER-schen Operationen wird dieser Abschnitt nach LEVITZ [3] durch die SCHÜTTE-FEFERMAN-Zahl, d.i. die kleinste stark kritische Zahl $\kappa(0)$, begrenzt.

In der vorliegenden Arbeit werden die SAARNIOSchen Operationen untersucht, wobei das Teilsystem der "einstelligen Operationen", in etwas verallgemeinerter Weise das Gesamtsystem und schließlich noch ein von SAARNIO in [4] lediglich angedeutetes "maximales" System betrachtet werden. Das letztere ist das stärkste durch das SAARNIOSche Konstruktionsprinzip erreichbare Bezeichnungssystem. Als Grenzzahlen ergeben sich $\kappa(0)$ für das Teilsystem, die nächste stark kritische Zahl $\kappa(1)$ für das in [4] beschriebene Hauptsystem und für das maximale System eine Zahl, die man schlagwortartig als "kleinste stark kritische Zahl der Folge der stark kritischen Zahlen" bezeichnen kann. Diese Zahl liegt noch beträchtlich unterhalb der VEBLEN-Zahl $E(1)$ [7].

Die Untersuchungen werden durchgeführt mit Hilfe eines neuen Systems von höheren arithmetischen Operationen ϕ_α , das in §1 in Analogie zu dem FINSLERSchen System definiert wird. Dieses System hat ebenfalls die Grenzzahl $\kappa(0)$, wie sich in §2 durch die Betrachtung der Hauptzahlen der Operationen ϕ_α und in §7 ergibt. In den §§4-6 werden die Verbindungen hergestellt zwischen den einzelnen SAARNIOSchen Systemen und dem System der ϕ_α . Damit läßt sich die Untersuchung der ersteren auf die des letzteren zurückführen und vereinheitlichen. Auf diese Weise können

in §7 sehr einfach die einzelnen Grenzzahlen bestimmt werden.

Eingeschoben ist der §3. Dort wird ein genauer Vergleich des eingeführten Operationensystems mit den FINSLERSchen Operationen angegeben. Damit könnte man, zusammen mit dem Ergebnis von LEVITZ [3], die Grenzzahl der Operationen Φ , ohne die Betrachtung der Hauptzahlen bestimmen. So jedoch kann dieser Paragraph auch als Verbindung und Bestätigung beider Ergebnisse angesehen werden.

Herrn Professor Dr. Kurt Schütte danke ich herzlich für die Anregung zu dieser Arbeit und für seine freundliche Förderung während ihres Entstehens.

§1. Ein System arithmetischer Operationen

Es sei Z die Vereinigung der ersten und zweiten Zahlenklasse. Alle im weiteren Verlauf dieser Arbeit betrachteten Ordinalzahlen seien Zahlen aus Z .

Eine arithmetische Operation ist eine Funktion f von zwei Variablen, die jedem geordneten Paar (β, α) von Ordinalzahlen eindeutig eine Ordinalzahl $f(\beta, \alpha)$ zuordnet. Wir unterscheiden folgende Bedingungen, denen eine arithmetische Operation f für $\alpha > 1$ und $\beta > 1$ unterworfen sein kann¹⁾:

- (I'') $f(\beta, \alpha)$ ist für festes α eine monotone Funktion von β mit $f(\beta, \alpha) \geq \beta$.
- (I') $f(\beta, \alpha)$ ist für festes α eine halbnormale Funktion von β mit $f(\beta, \alpha) \geq \beta$.
- (I) $f(\beta, \alpha)$ ist für festes α eine Normalfunktion von β .
- (II) $f(\beta, \alpha)$ ist für festes β eine monotone Funktion von α mit $f(\beta, \alpha) > \alpha$.

Dabei heißt eine Funktion g in üblicher Weise monoton, wenn $g(\xi) \leq g(\eta)$ für $\xi \leq \eta$, wachsend, wenn $g(\xi) < g(\eta)$ für $\xi < \eta$ gilt, stetig, wenn $g(\lambda) = \lim_{\xi \nearrow \lambda} g(\xi)$ für jede Limeszahl λ gilt, halbnormal, wenn sie monoton und stetig ist, und schließlich Normalfunktion, wenn sie wachsend und stetig ist.

Für eine arithmetische Operation f und $\nu \geq 1$ definieren wir eine ν -fache Iteration f^ν durch transfinite Rekursion:

$$\begin{aligned} f^1(\beta, \alpha) &= f(\beta, \alpha) \\ f^{\nu+1}(\beta, \alpha) &= f(f^\nu(\beta, \alpha), f^\nu(\beta, \alpha)) \\ f^\nu(\beta, \alpha) &= \lim_{\mu \nearrow \nu} f^\mu(\beta, \alpha), \quad \text{falls } \nu \text{ Limeszahl,} \end{aligned}$$

und falls dieser Limes existiert.

Dazu definieren wir noch

$$f^0(\alpha, \alpha) = \alpha.$$

1) Vgl. BACHMANN [1], §13.

Lemma 1. Sei $\alpha > 1$, $\beta > 1$. Die arithmetische Operation f genüge den Bedingungen (I'') und (II). Dann gilt:

- a) $f^v(\beta, \alpha)$ existiert für jedes $v \geq 1$.
- b) $f^v(\beta, \alpha)$ genügt den Bedingungen (I'') und (II).
- c) $f^{v'}(\beta, \alpha) < f^v(\beta, \alpha)$ für $1 \leq v' < v$.

Beweis durch transfinite Induktion nach v : Für $v = 1$ ist alles erfüllt. Gilt das Lemma für $v \geq 1$, so existiert $f^{v+1}(\beta, \alpha)$. Weiter ist dann für $\beta_1 \geq \beta_2 > 1$, $\alpha_1 \geq \alpha_2 > 1$:

$$f^{v+1}(\beta_1, \alpha_1) = f(f^v(\beta_1, \alpha_1), f^v(\beta_1, \alpha_1)) \geq f(f^v(\beta_2, \alpha_2), f^v(\beta_2, \alpha_2)) = f^{v+1}(\beta_2, \alpha_2), \text{ d.h. } f^{v+1} \text{ ist monoton in beiden Variablen, und}$$

es gilt $f^{v+1}(\beta, \alpha) = f(f^v(\beta, \alpha), f^v(\beta, \alpha)) > f^v(\beta, \alpha)$ und $f^v(\beta, \alpha) \geq \beta$, $f^v(\beta, \alpha) > \alpha$ und $f^v(\beta, \alpha) \geq f^{v'}(\beta, \alpha)$ für $1 \leq v' < v+1$. Also gilt das Lemma für $v+1$.

Sei schließlich $v = \lim_{v' < v} v'$, und das Lemma gelte für $1 \leq v' < v$.

Dann ist $f^{v'}(\beta, \alpha)$ für $1 \leq v' < v$ wachsend in v' , also existiert $\lim_{v' < v} f^{v'}(\beta, \alpha)$, und es ist $f^v(\beta, \alpha) > f^{v'}(\beta, \alpha)$. Wegen $f^{v'}(\beta, \alpha) \geq \beta$, $f^{v'}(\beta, \alpha) > \alpha$ und $f^v(\beta, \alpha) = \lim_{v' < v} f^{v'}(\beta, \alpha) \geq \lim_{v' < v} f^{v'}(\beta_2, \alpha_2) = f^v(\beta_2, \alpha_2)$ für $\beta_1 \geq \beta_2 > 1$, $\alpha_1 \geq \alpha_2 > 1$ ist dann das Lemma auch für diesen Fall nachgewiesen.

Eine transfinite Folge ϕ_α arithmetischer Operationen kann nun wie bei FINSLER [2] durch folgende Festsetzungen definiert werden:

Für $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ sei

$$\phi_0(\beta, \alpha) = \alpha + 1$$

$$\phi_1(\beta, \alpha) = \alpha + \beta$$

$$\phi_2(\beta, \alpha) = \alpha \cdot \beta$$

$$\phi_3(\beta, \alpha) = \alpha^\beta$$

$$\phi_{\mu+1}(\beta, \alpha) = \phi_\mu^\beta(\alpha, \alpha) \quad \text{für } \mu \geq 3$$

$$\phi_\mu(\beta, \alpha) = \lim_{\mu' < \mu} \phi_{\mu'}(\beta, \alpha), \quad \text{falls } \mu \text{ Limeszahl.}$$

Die Existenz dieses Limes wird noch gesichert werden. Ferner sei angemerkt, daß man auch ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 jeweils durch Iteration von ϕ_0 , ϕ_1 bzw. ϕ_2 definieren kann, was aber hier auf eine etwas weniger bündige Bezeichnungsweise als bei FINSLER [2] führt.

Lemma 2. Sei $\alpha > 1$, $\beta > 1$, $\mu_1 > \mu_2 \geq 3$. Existiert $\phi_{\mu_1}(\beta', \alpha')$ für $\mu' \leq \mu_1$ und beliebige $\alpha' > 1$, $\beta' > 1$, und genügt ϕ_{μ_1} den Bedingungen (I') und (II), so gilt:

- a) $\phi_{\mu_1}(\beta, \alpha) > \phi_{\mu_2}(\beta, \alpha)$, falls $\alpha \geq \beta$.
- b) $\phi_{\mu_1}(\beta, \alpha) \geq \phi_{\mu_2}(\beta, \alpha)$.
- c) $\phi_{\mu_1}(\beta, \alpha) > \phi_{\mu_2}(\beta, \alpha)$, falls μ_2 und β keine Limeszahlen sind.

Beweis durch transfinite Induktion nach μ_1 :

Fall 1. $\mu_1 = 4$, $\mu_2 = 3$. Dann ist nach Lemma 1

$\phi_4(\beta, \alpha) = \phi_3^B(\alpha, \alpha) > \phi_3(\alpha, \alpha) = \alpha^\alpha \geq \alpha^\beta = \phi_3(\beta, \alpha)$ für $\alpha \geq \beta > 1$. Wir zeigen b) und c) durch eingeschachtelte transfinite Induktion nach $\beta > \alpha$. Nämlich: $\phi_4(\beta+1, \alpha) = \phi_3^{\beta+1}(\alpha, \alpha) =$

$$\begin{aligned} \phi_3(\phi_3^\beta(\alpha, \alpha), \phi_3^\beta(\alpha, \alpha)) &= \phi_4(\phi_3(\beta, \alpha), \phi_3(\beta, \alpha)) \geq \\ \phi_3(\phi_3(\beta, \alpha), \phi_3(\beta, \alpha)) &= \phi_3(\alpha^\beta, \alpha^\beta) = (\alpha^\beta)^{\alpha^\beta} = \alpha^{\beta \cdot \alpha^\beta} > \\ \alpha^{\beta+1} &= \phi_3(\beta+1, \alpha) \quad \text{und} \quad \phi_4(\lim_{\beta' < \beta} \beta', \alpha) = \lim_{\beta' < \beta} \phi_4(\beta', \alpha) \geq \\ \lim_{\beta' < \beta} \phi_3(\beta', \alpha) &= \phi_3(\lim_{\beta' < \beta} \beta', \alpha). \end{aligned}$$

Fall 2. Sei $\mu_1 = \mu_1' + 1$, $\mu_1' \geq 3$, und für $\mu' < \mu_1$ gelte das

Lemma. Für $\alpha \geq \beta > 1$ ist dann $\phi_{\mu_1}(\beta, \alpha) = \phi_{\mu_1'}^\beta(\alpha, \alpha) > \phi_{\mu_1'}(\alpha, \alpha) \geq \phi_{\mu_1'}(\beta, \alpha) \geq \phi_{\mu_2}(\beta, \alpha)$.

b) und c) zeigen wir wieder durch Induktion nach $\beta > \alpha$.

Fall 2.1. Es ist $\phi_{\mu_1}(\beta+1, \alpha) = \phi_{\mu_1'}(\phi_{\mu_1'}^\beta(\alpha, \alpha), \phi_{\mu_1'}^\beta(\alpha, \alpha)) = \phi_{\mu_1'}(\phi_{\mu_1}(\beta, \alpha), \phi_{\mu_1}(\beta, \alpha))$.

Fall 2.1.1. Sei $\mu_1' = \mu_1'' + 1$, $\mu_1'' \geq 3$. Mit der neuen Induktionsvoraussetzung $\phi_{\mu_1}(\beta, \alpha) \geq \phi_{\mu_1'}(\beta, \alpha)$ und dem bereits bewiesenen Teil a) folgt:

$$\begin{aligned} \phi_{\mu_1'}(\phi_{\mu_1}(\beta, \alpha), \phi_{\mu_1}(\beta, \alpha)) &\geq \phi_{\mu_1'}(\phi_{\mu_1'}(\beta, \alpha), \phi_{\mu_1'}(\beta, \alpha)) > \\ \phi_{\mu_1''}(\phi_{\mu_1''+1}(\beta, \alpha), \phi_{\mu_1''+1}(\beta, \alpha)) &= \phi_{\mu_1''+1}(\beta+1, \alpha) = \phi_{\mu_1'}(\beta+1, \alpha) \\ &\geq \phi_{\mu_2}(\beta+1, \alpha), \quad \text{also} \quad \phi_{\mu_1}(\beta+1, \alpha) > \phi_{\mu_2}(\beta+1, \alpha). \end{aligned}$$

Fall 2.1.2. Sei $\mu_1' = \lim_{\mu_1'' < \mu_1'} \mu_1''$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \phi_{\mu_1'}(\phi_{\mu_1}(\beta, \alpha), \phi_{\mu_1}(\beta, \alpha)) &\geq \lim_{\mu_1'' < \mu_1'} \phi_{\mu_1''}(\phi_{\mu_1''+1}(\beta, \alpha), \phi_{\mu_1''+1}(\beta, \alpha)) \\ &= \lim_{\mu_1'' < \mu_1'} \phi_{\mu_1''+1}(\beta+1, \alpha) = \phi_{\mu_1'}(\beta+1, \alpha), \quad \text{und mit der Induktions-} \\ &\text{voraussetzung bezüglich } \mu_1 \text{ folgt die Behauptung b) oder c).} \end{aligned}$$

Fall 2.2. Sei $\beta = \lim_{\beta' < \beta} \beta'$. Dann gilt wegen der vorausgesetzten Stetigkeit von ϕ_{μ_1} und ϕ_{μ_2} in der ersten Variablen:

$$\phi_{\mu_1}(\beta, \alpha) = \lim_{\beta' < \beta} \phi_{\mu_1}(\beta', \alpha) \geq \lim_{\beta' < \beta} \phi_{\mu_2}(\beta', \alpha) = \phi_{\mu_2}(\beta, \alpha).$$

Fall 3. Sei $\mu_1 = \lim_{\mu' < \mu_1} \mu'_1$. Dann existiert $\lim_{\mu' < \mu_1} \phi_{\mu'_1}(\beta, \alpha)$, und es ist $\phi_{\mu_1}(\beta, \alpha) = \lim_{\mu' < \mu_1} \phi_{\mu'_1}(\beta, \alpha) \geq \phi_{\mu_2+1}(\beta, \alpha)$. Wie oben ergibt sich daraus entweder $\phi_{\mu_1}(\beta, \alpha) > \phi_{\mu_2}(\beta, \alpha)$ oder $\phi_{\mu_1}(\beta, \alpha) \geq \phi_{\mu_2}(\beta, \alpha)$.

Damit ist Lemma 2 bewiesen.

Lemma 3.

- a) $\phi_{\mu}(\beta, \alpha)$ existiert für $\mu \geq 0, \alpha > 1, \beta > 1$.
- b) Ist μ Nachfolgerzahl, so genügt ϕ_{μ} den Bedingungen (I) und (II).
- c) Ist μ Limeszahl, so genügt ϕ_{μ} den Bedingungen (I') und (II).

Beweis durch transfinite Induktion nach μ :

Fall 1. Für $\mu = 0, 1, 2, 3$ gilt das Lemma.

Fall 2. $\mu = \mu_0 + 1, \mu_0 \geq 3$. Das Lemma gelte für alle $\mu' < \mu$.

Nach Lemma 1 existiert $\phi_{\mu}(\beta, \alpha) = \phi_{\mu_0}^{\beta}(\alpha, \alpha)$. Für $\beta_1 > \beta_2 > 1$

$$\text{ist } \phi_{\mu}(\beta_1, \alpha) = \phi_{\mu_0}^{\beta_1}(\alpha, \alpha) > \phi_{\mu_0}^{\beta_2}(\alpha, \alpha) = \phi_{\mu}(\beta_2, \alpha).$$

Für $\beta = \lim_{\beta' < \beta} \beta'$ ist $\phi_{\mu}(\beta, \alpha) = \phi_{\mu_0}^{\beta}(\alpha, \alpha) = \lim_{\beta' < \beta} \phi_{\mu_0}^{\beta'}(\alpha, \alpha) = \lim_{\beta' < \beta} \phi_{\mu}(\beta', \alpha)$. Damit gilt (I). Für $\alpha_1 \geq \alpha_2 > 1$ ist

$$\phi_{\mu}(\beta, \alpha_1) = \phi_{\mu_0}^{\beta}(\alpha_1, \alpha_1) \geq \phi_{\mu_0}^{\beta}(\alpha_2, \alpha_2) = \phi_{\mu}(\beta, \alpha_2) \quad \text{und}$$

weiter $\phi_{\mu}(\beta, \alpha) = \phi_{\mu_0}^{\beta}(\alpha, \alpha) > \alpha$, also gilt (II).

Fall 3. $\mu = \lim_{\mu' < \mu} \mu'$. Das Lemma gelte für alle $\mu' < \mu$. Nach Lemma 2

ist $\phi_{\mu'}(\beta, \alpha)$ für $\mu' < \mu$ eine monotone Funktion von μ' , also

existiert $\lim_{\mu' < \mu} \phi_{\mu'}(\beta, \alpha) = \phi_{\mu}(\beta, \alpha)$. Für $\beta_1 \geq \beta_2 > 1, \alpha_1 \geq \alpha_2 > 1$

$$\text{gilt } \phi_{\mu}(\beta_1, \alpha_1) = \lim_{\mu' < \mu} \phi_{\mu'}(\beta_1, \alpha_1) \geq \lim_{\mu' < \mu} \phi_{\mu'}(\beta_2, \alpha_2) =$$

$\phi_{\mu}(\beta_2, \alpha_2)$, d.h. ϕ_{μ} ist monoton in beiden Variablen, und es ist

$$\text{weiter } \lim_{\mu' < \mu} \phi_{\mu'}(\beta, \alpha) \geq \beta \quad \text{und} \quad \lim_{\mu' < \mu} \phi_{\mu'}(\beta, \alpha) \geq \phi_{\mu'}(\beta, \alpha) > \alpha.$$

Schließlich ist für $\beta = \lim_{\beta' < \beta} \beta'$:

$$\phi_{\mu}(\beta, \alpha) = \lim_{\mu' < \mu} \phi_{\mu'}(\beta, \alpha) = \lim_{\mu' < \mu} \left(\lim_{\beta' < \beta} \phi_{\mu'}(\beta', \alpha) \right) =$$

$$\lim_{\beta' < \beta} \left(\lim_{\mu' < \mu} \phi_{\mu'}(\beta', \alpha) \right) = \lim_{\beta' < \beta} \phi_{\mu}(\beta', \alpha), \quad \text{wobei die Vertauschung}$$

der Limesoperationen erlaubt ist, da $\phi_{\mu'}(\beta', \alpha)$ für $\mu' < \mu$ und

$\beta' < \beta$ nach Induktionsvoraussetzung als monoton in μ' und β'

angenommen werden kann und beide Limeszahlen μ und β als

Limites von Zahlenfolgen vom Typ ω dargestellt werden können²⁾.

2) Vgl. BACHMANN [1], §5, Satz 1.

Damit gilt in diesem Fall (I') und (II), und das Lemma ist bewiesen.

Lemma 4. $\phi_{\mu}(\beta, \alpha)$ existiert für alle $\mu \geq 0, \alpha \geq 0, \beta \geq 0$.

Beweis: Wir haben nur noch die Spezialfälle $\alpha \leq 1, \beta \leq 1$ zu untersuchen. Für $\mu = 0, 1, 2, 3$ ist die Aussage trivial. Sei $\mu \geq 4$. Dann ist $\phi_{\mu}(0, \alpha) = \alpha, \phi_{\mu}(\beta, 0) = 1$ für $\beta > 0, \phi_{\mu}(\beta, 0) = 0$ für $\mu > 4$ und $\phi_{\mu}(\beta, 1) = 1$. Außerdem gilt $\phi_{\mu+1}(1, \alpha) = \phi_{\mu}(\alpha, \alpha) \geq \phi_{\mu}(1, \alpha)$ für $\alpha \geq 1$, also existiert auch $\lim_{\mu' \leq \mu} \phi_{\mu'}(1, \alpha)$, falls μ Limeszahl ist.

Die Existenz der Funktionswerte $\phi_{\mu}(\beta, \alpha)$ ist damit allgemein bewiesen, zusammen mit einer Reihe von Monotonieeigenschaften, die wir hier der Übersicht halber noch einmal geschlossen angeben wollen: (Dabei ist zu bemerken, daß (4) für Nachfolgerzahlen μ aus der Eigenschaft (I) folgt, daß die Voraussetzungen von Lemma 2 durch Lemma 3 gesichert sind, und daß die teilweise zugelassenen Werte $\beta \leq 1, \alpha \leq 1$ triviale Fälle liefern.)

- (1) $\phi_{\mu}(\beta, \alpha_1) \geq \phi_{\mu}(\beta, \alpha_2)$ für $\beta \geq 1, \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq 1$
- (2) $\phi_{\mu}(\beta, \alpha) > \alpha$ für $\beta > 1, \alpha > 1$
- (3) $\phi_{\mu}(\beta_1, \alpha) > \phi_{\mu}(\beta_2, \alpha)$ für $\beta_1 > \beta_2, \alpha > 1$,
falls μ Nachfolgerzahl
- (3') $\phi_{\mu}(\beta_1, \alpha) \geq \phi_{\mu}(\beta_2, \alpha)$ für $\beta_1 \geq \beta_2, \alpha > 1$,
falls μ Limeszahl
- (4) $\phi_{\mu}(\beta, \alpha) \geq \beta$ für $\alpha > 1, \mu \geq 1$
- (5) $\phi_{\mu_1}(\beta, \alpha) \geq \phi_{\mu_2}(\beta, \alpha)$ für $\beta > 1, \alpha > 1, \mu_1 \geq \mu_2$
- (5') $\phi_{\mu_1}(\beta, \alpha) > \phi_{\mu_2}(\beta, \alpha)$ für $\beta > 1, \alpha > 1, \mu_1 > \mu_2$,
falls μ_2 und β keine Limeszahlen sind, oder falls $\alpha \geq \beta$

Außerdem haben wir für $\alpha > 1, \mu > 0$ die Stetigkeit von $\phi_{\mu}(\beta, \alpha)$ in der Variablen β bewiesen. Da sie offensichtlich auch für $\alpha \leq 1$ und $\mu = 0$ gegeben ist, gelten in Verallgemeinerung der Rekursionsformeln für Addition, Multiplikation und Potenzierung folgende Rekursionsformeln der höheren arithmetischen Operationen:

$$(6) \quad \phi_{\mu+1}(\beta+1, \alpha) = \phi_{\mu}(\phi_{\mu+1}(\beta, \alpha), \phi_{\mu+1}(\beta, \alpha)) \quad \text{für } \mu \geq 3$$

$$(7) \quad \phi_{\mu}(\beta, \alpha) = \lim_{\beta' < \beta} \phi_{\mu}(\beta', \alpha), \quad \text{falls } \beta \text{ Limeszahl}$$

Schließlich bemerken wir, daß auch $\phi_{\mu}^{\nu}(\beta, \alpha)$ für alle Werte von $\nu \geq 1, \mu, \alpha, \beta$ existiert, und notieren die sehr leicht mittels transfiniter Induktion nach ν einsichtige Formel

$$\phi_{\mu}^{\nu_1 + \nu_2}(\beta, \alpha) = \phi_{\mu}^{\nu_1}(\phi_{\mu}^{\nu_2}(\beta, \alpha), \phi_{\mu}^{\nu_1}(\beta, \alpha)) \quad \text{für } \nu_1 \geq 1, \nu_2 \geq 0$$

und als unmittelbare Folgerung davon:

$$(8) \quad \phi_{\mu+1}(\beta + \gamma, \alpha) = \phi_{\mu+1}(\gamma, \phi_{\mu+1}(\beta, \alpha)) \quad \text{für } \mu \geq 3.$$

§2. Hauptzahlen

Eine Ordinalzahl η heißt Hauptzahl der arithmetischen Operation f , wenn es eine Ordinalzahl $A < \eta$ gibt mit $f(\eta, \alpha) = \eta$ für alle α mit $A \leq \alpha < \eta$.

Genügt die arithmetische Operation f den Bedingungen (I'') und (II), so ist η genau dann Hauptzahl von f , wenn gilt:

$$f(\eta, \alpha) = \eta \quad \text{für alle } \alpha \text{ mit } 1 < \alpha < \eta.$$

Denn ist η Hauptzahl von f und $f(\eta, \alpha') = \eta$ für $A \leq \alpha' < \eta$, so ist für $1 < \alpha < A$: $\eta \leq f(\eta, \alpha) \leq f(\eta, A) = \eta$, also gilt $f(\eta, \alpha) = \eta$ für $1 < \alpha < \eta$, und die Umkehrung ist trivial.

Nach BACHMANN [1] gilt³⁾: Genügt f den Bedingungen (I) und (II), und ist $\alpha > 1$, so ist die kleinste Hauptzahl $> \alpha$ von f die Zahl $\xi = \lim_{n < \omega} \xi_n$, wobei

$$\xi_0 = \alpha$$

$$\xi_{n+1} = f(\xi_n, \xi_n).$$

Lemma 5. Sei $\mu \geq 1$. Die Hauptzahlen der Operation ϕ_{μ} bilden den Wertbereich einer Normalfunktion mit Definitionsbereich $\mathbb{Z}$.

Beweis: Wir beweisen hier nur die Stetigkeit, die wir im folgenden benötigen. Dort wird sich aber auch ergeben, daß es zu jeder Hauptzahl von ϕ_{μ} eine größere gibt, wodurch dann das Lemma gerechtfertigt ist.

3) §15, Satz 3.

Sei also λ Limeszahl und $(\{x\}_{x < \lambda})$ eine wachsende Folge von Hauptzahlen von ϕ_μ . Sei $\xi = \lim_{x < \lambda} \{x\}$ und $1 < \alpha < \xi$. Dann gibt es einen Index $y < \lambda$ mit $\alpha < \xi_y$, also $\alpha < \xi_x$ für $y \leq x < \lambda$ und somit $\phi_\mu(\{x, \alpha\}) = \xi_x$ für $y \leq x < \lambda$. Damit ist

$$\xi = \lim_{x < \lambda} \xi_x = \lim_{x < \lambda} \phi_\mu(\{x, \alpha\}) = \phi_\mu(\lim_{x < \lambda} \{x, \alpha\}) = \phi_\mu(\xi, \alpha),$$

also ξ Hauptzahl von ϕ_μ , und zwar offensichtlich die kleinste, die größer ist als alle ξ_x .

Wir bemerken nun zunächst, daß ω Hauptzahl jeder Operation ϕ_μ mit $1 \leq \mu \leq \omega$ ist. Für $\mu > \omega$ ist ω nicht Hauptzahl von ϕ_μ .

Es sei $\eta_\mu(x)$ ($\mu \geq 1$) die Normalfunktion der Hauptzahlen $> \omega$ der Operation ϕ_μ . Bekanntlich ist

$$\eta_1(x) = \omega^{2+x}$$

$$\text{und} \quad \eta_2(x) = \omega^{\omega^{1+x}}.$$

Wir wollen im folgenden η_μ auch für $\mu > 2$ explizit darstellen. Für Nachfolgerzahlen μ leistet das der

Satz 1. Ist $\mu \geq 3$ Nachfolgerzahl, so gilt:

$$\eta_\mu(x) = \phi_{\mu+1}(\omega \cdot (1+x), \omega).$$

Beweis durch transfinite Induktion nach x : Da μ Nachfolgerzahl, genügt ϕ_μ nach Lemma 3 den Bedingungen (I) und (II), wir können also den oben zitierten Satz aus BACHMANN [1] anwenden.

1) $x = 0$. $\eta_\mu(0)$ ist die kleinste Hauptzahl $> \omega$ von ϕ_μ , also

$$\eta_\mu(0) = \lim_{n < \omega} \{n\} \quad \text{mit} \quad \{0\} = \omega, \quad \{n+1\} = \phi_\mu(\{n, \{n\}\}) = \phi_\mu^{n+1}(\{0, \{0\}\})$$

$$\text{und folglich} \quad \eta_\mu(0) = \lim_{n < \omega} \{n\} = \lim_{n < \omega} \phi_\mu^n(\omega, \omega) = \lim_{n < \omega} \phi_{\mu+1}(n, \omega) =$$

$$\phi_{\mu+1}(\omega, \omega) = \phi_{\mu+1}(\omega \cdot (1+0), \omega).$$

$$2) \quad x = x_0 + 1. \quad \text{Sei} \quad \eta_\mu(x_0) = \phi_{\mu+1}(\omega \cdot (1+x_0), \omega).$$

$\eta_\mu(x)$ ist die kleinste Hauptzahl von ϕ_μ , die größer ist als $\phi_{\mu+1}(\omega \cdot (1+x_0), \omega)$. Also gilt wie eben und mit Hilfe von (8):

$$\begin{aligned} \eta_\mu(x_0 + 1) &= \lim_{n < \omega} \phi_\mu^n(\phi_{\mu+1}(\omega \cdot (1+x_0), \omega), \phi_{\mu+1}(\omega \cdot (1+x_0), \omega)) \\ &= \lim_{n < \omega} \phi_{\mu+1}(n, \phi_{\mu+1}(\omega \cdot (1+x_0), \omega)) \\ &= \phi_{\mu+1}(\omega, \phi_{\mu+1}(\omega \cdot (1+x_0), \omega)) \end{aligned}$$

$$= \phi_{\mu+1}(\omega \cdot (1 + x_0) + \omega, \omega)$$

$$= \phi_{\mu+1}(\omega \cdot (1 + x_0 + 1), \omega) = \phi_{\mu+1}(\omega \cdot (1 + x), \omega).$$

$$3) \quad x = \lim_{\xi < x} \xi. \quad \text{Sei} \quad \eta_{\mu}(\xi) = \phi_{\mu+1}(\omega \cdot (1 + \xi), \omega) \quad \text{für} \quad \xi < x.$$

$$\text{Mit Lemma 5 ist} \quad \eta_{\mu}(x) = \lim_{\xi < x} \eta_{\mu}(\xi) = \lim_{\xi < x} \phi_{\mu+1}(\omega \cdot (1 + \xi), \omega) \\ = \phi_{\mu+1}(\omega \cdot (1 + x), \omega).$$

Damit ist Satz 1 bewiesen.

Lemma 6. Ist $\eta \geq \omega$ Hauptzahl einer Operation ϕ_{μ} , $\mu > 1$, so ist η Hauptzahl jeder Operation $\phi_{\mu'}$ mit $1 \leq \mu' < \mu$. Ist μ Limeszahl und gibt es $\mu_0 \geq 1$, so daß η Hauptzahl von ϕ_{μ_0} für jedes μ' mit $\mu_0 \leq \mu' < \mu$ ist, so ist η Hauptzahl von ϕ_{μ} .

Beweis: Wir beweisen den ersten Teil des Lemmas durch transfinite Induktion nach μ . Für $\mu = 2, 3$ ist die Aussage bekannt. Sei $\mu \geq 3$ und $\eta \geq \omega$ Hauptzahl von $\phi_{\mu+1}$. η ist Limeszahl, denn wäre $\eta = \xi + 1$, so hätte man mit $\phi_{\mu+1}(\eta, \xi) > \phi_{\mu+1}(\xi, \xi) > \xi$ und folglich $\phi_{\mu+1}(\eta, \xi) > \eta$ einen Widerspruch. Angenommen: η ist nicht Hauptzahl von ϕ_{μ} . Dann gibt es α mit $1 < \alpha < \eta$ und $\phi_{\mu}(\eta, \alpha) > \eta$, also gibt es weiter ein ξ mit $1 < \xi < \eta$ und $\phi_{\mu}(\xi, \alpha) > \eta$. Daraus ergibt sich folgender Widerspruch: $\phi_{\mu+1}(\eta, \xi) > \phi_{\mu+1}(\alpha + 1, \xi) = \phi_{\mu}(\phi_{\mu+1}(\alpha, \xi), \phi_{\mu+1}(\alpha, \xi)) > \phi_{\mu}(\xi, \alpha) > \eta$. Also ist η Hauptzahl von ϕ_{μ} und nach Induktionsvoraussetzung auch von $\phi_{\mu'}$ für $1 \leq \mu' < \mu$.

Sei nun μ Limeszahl, $\eta \geq \omega$ Hauptzahl von ϕ_{μ_0} . Gäbe es ein $1 \leq \mu' < \mu$, so daß η nicht Hauptzahl von $\phi_{\mu'}$ ist, so gäbe es ein α mit $1 < \alpha < \eta$ und $\phi_{\mu'}(\eta, \alpha) > \eta$. Dann wäre aber auch $\phi_{\mu_0}(\eta, \alpha) > \eta$ für alle $\mu'' \geq \mu'$ und $\phi_{\mu}(\eta, \alpha) > \eta$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

Damit ist der erste Teil gezeigt. Ist andererseits μ Limeszahl und η Hauptzahl von $\phi_{\mu'}$ für alle μ' mit $1 \leq \mu_0 \leq \mu' < \mu$, so ist für $1 < \alpha < \eta$: $\phi_{\mu}(\eta, \alpha) = \eta$, also auch $\phi_{\mu}(\eta, \alpha) = \eta$, d.h. η ist Hauptzahl von ϕ_{μ} .

Mit dieser Vorbereitung können wir nun auch die Hauptzahlen der Operationen ϕ_{μ} mit Limeszahl-Index bestimmen:

Satz 2. Ist μ Limeszahl, so gilt: $\eta_{\mu}(x) = \phi_{\mu+1}(1 + x, \omega)$.

Beweis durch transfinite Induktion nach x :

1) $x = 0$. Es sei $\mu' < \mu$ und μ' Nachfolgerzahl. Sei $\alpha < \Phi_{\mu+1}(1, \omega) = \Phi_\mu(\omega, \omega)$. Dann gibt es $\mu_0 < \mu$, so daß $\alpha < \Phi_{\mu_0}(\omega, \omega)$ gilt. Es sei nun $\mu_0 < \mu$ so gewählt, daß $\mu_0 \geq \mu'$ und $\mu_0 \geq \mu_1$ gilt. Für $\mu' \leq \mu_0 < \mu$ ist $\Phi_{\mu_0+2}(\omega, \omega)$ nach Satz 1 Hauptzahl von Φ_{μ_0+1} und damit nach Lemma 6 Hauptzahl von $\Phi_{\mu'}$. Da nach der Wahl von μ_0 auch $\alpha < \Phi_{\mu_0+2}(\omega, \omega)$ ist für $\mu_0 < \mu < \mu$, gilt also: $\Phi_{\mu'}(\Phi_{\mu_0+2}(\omega, \omega), \alpha) = \Phi_{\mu_0+2}(\omega, \omega)$.

Somit ist $\Phi_{\mu'}(\Phi_\mu(\omega, \omega), \alpha) = \lim_{\mu_0 < \mu} \Phi_{\mu'}(\Phi_{\mu_0+2}(\omega, \omega), \alpha) = \lim_{\mu_0 < \mu} \Phi_{\mu_0+2}(\omega, \omega) = \Phi_\mu(\omega, \omega)$, d.h. $\Phi_\mu(\omega, \omega) = \Phi_{\mu+1}(1, \omega)$ ist Hauptzahl von $\Phi_{\mu'}$ und nach Lemma 6 auch Hauptzahl von Φ_μ .

Ist andererseits $\eta > \omega$, η Hauptzahl von $\Phi_{\mu'}$, so ist $\eta = \Phi_{\mu'}(\eta, \omega) \geq \Phi_\mu(\omega, \omega)$, also ist $\Phi_{\mu+1}(1, \omega)$ die kleinste Hauptzahl $> \omega$ von Φ_μ , d.h. $\eta_\mu(0) = \Phi_{\mu+1}(1+0, \omega)$.

2) $x = x_0 + 1$. Sei $\beta \leq \mu' < \mu$, μ' Nachfolgerzahl. Nach Induktionsvoraussetzung ist $\xi = \Phi_{\mu'+1}(1+x_0, \omega)$ Hauptzahl von $\Phi_{\mu'}$, also auch von $\Phi_{\mu'}$. Nach Satz 1 gibt es demnach ein $\beta > 0$, so daß gilt $\xi = \Phi_{\mu'+1}(\omega \cdot \beta, \omega)$. Wegen $\omega \cdot \xi = \xi$ und mit Hilfe von Formel (8) folgt $\Phi_{\mu'+1}(\xi, \xi) = \Phi_{\mu'+1}(\omega \cdot \xi, \Phi_{\mu'+1}(\omega \cdot \beta, \omega)) =$

$\Phi_{\mu'+1}(\omega \cdot \beta + \omega \cdot \xi, \omega) = \eta_{\mu'}(\beta + \xi)$, d.h. $\Phi_{\mu'+1}(\xi, \xi)$ ist Hauptzahl von $\Phi_{\mu'}$. Analog zu oben ergibt sich, daß $\lim_{\mu_0 < \mu} \Phi_{\mu'+1}(\xi, \xi) =$

$\Phi_\mu(\Phi_{\mu+1}(1+x_0, \omega), \Phi_{\mu+1}(1+x_0, \omega)) = \Phi_{\mu+1}(1+x, \omega)$ Hauptzahl von $\Phi_{\mu'}$, nach Lemma 6 also auch von Φ_μ ist.

Ist andererseits $\eta > \eta_\mu(x_0)$, η Hauptzahl von $\Phi_{\mu'}$, so ist $\eta = \Phi_{\mu'}(\eta, \eta_\mu(x_0)) \geq \Phi_\mu(\eta_\mu(x_0), \eta_\mu(x_0)) = \Phi_{\mu+1}(1+x, \omega)$, also ist $\Phi_{\mu+1}(1+x, \omega)$ die kleinste Hauptzahl $> \eta_\mu(x_0)$, d.h. $\eta_\mu(x) = \Phi_{\mu+1}(1+x, \omega)$.

3) $x = \lim_{\xi < x} \xi$. Sei $\eta_\mu(\xi) = \Phi_{\mu+1}(1+\xi, \omega)$ für $\xi < x$.

Mit Lemma 5 ist $\eta_\mu(x) = \lim_{\xi < x} \eta_\mu(\xi) = \lim_{\xi < x} \Phi_{\mu+1}(1+\xi, \omega) = \Phi_{\mu+1}(1+x, \omega)$.

Damit ist $\eta_\mu(x)$ für jeden Index $\mu \geq 1$ bestimmt, und es hat sich ergeben, daß sich die Hauptzahlen der Operation Φ_μ , $\mu \geq 3$, mittels der "nachfolgenden" Operation $\Phi_{\mu+1}$ systematisch darstellen lassen.

Als nächstes wollen wir einen Zusammenhang herstellen zwischen den betrachteten Hauptzahlen und der Hierarchie von kritischen Zahlen, wie sie in SCHÜTTE [5] (u.a.) definiert ist. Dabei wird sich auch eine Bestimmung der Lösungen der Gleichung $\phi_\mu(\omega, \omega) = \mu$ ergeben, die bei der Frage der Darstellbarkeit von Ordinalzahlen (siehe §7) eine Rolle spielen, und deren kleinste sich als die "Grundzahl" der SAARNIOSchen Operationen erweisen wird.

Ist f eine Normalfunktion, so bilden die kritischen Zahlen von f , d.h. die Zahlen ξ mit $f(\xi) = \xi$, der Größe nach geordnet, wieder eine Normalfunktion, die Ableitung f' von f .

Ausgehend von einer Normalfunktion f , kann man eine transfinite Folge von Ableitungen f_λ bilden, indem man definiert:

$$\begin{aligned} f_0 &= f \\ f_{\mu+1} &= f'_\mu \\ \forall f_\lambda &= \bigcap_{\mu < \lambda} V f_\mu, \quad \text{wenn } \lambda \text{ Limeszahl ist.} \end{aligned}$$

$V f_\mu$ bezeichnet dabei den Wertbereich der Funktion f_μ .

Wählt man speziell $f(x) = \omega^x$, was wir im folgenden festhalten wollen, so sind die Werte jeder Funktion f_μ ($\mu \geq 1$) gerade die μ -kritischen Zahlen aus SCHÜTTE [5]. Die Lösungen der Gleichung $f_\mu(0) = \mu$ heißen stark kritische Zahlen. Diese bilden eine Normalfunktion κ , und die kleinste $\kappa(0)$ heißt SCHÜTTE-FEFERMAN-Zahl.⁴⁾

Wir betrachten nun wieder die Funktionen η_μ . Für die Ableitung solch einer Funktion ergibt sich:

Satz 3. Für $\mu \geq 3$ ist $\eta'_\mu = \eta_{\mu+1}$.

Beweis: Sei $\mu \geq 3$. Wir zeigen zunächst, daß $\eta_{\mu+1}(x)$ für jedes $x \geq 0$ kritische Zahl von η_μ ist. Es ist nämlich $1 + \eta_{\mu+1}(x) = \omega \cdot \eta_{\mu+1}(x) = \eta_{\mu+1}(x)$. Je nachdem, ob nun $\eta_\mu(x) = \phi_{\mu+1}(\omega \cdot (1+x), \omega)$ oder $\eta_\mu(x) = \phi_{\mu+1}(1+x, \omega)$ ist, folgt damit $\eta_\mu(\eta_{\mu+1}(x)) = \phi_{\mu+1}(\eta_{\mu+1}(x), \omega) = \eta_{\mu+1}(x)$, d.h. $\eta_{\mu+1}(x)$ ist kritische Zahl von η_μ .

4) Die sonst übliche Bezeichnungsweise " κ_0 " wird in §6 für die Funktion κ gebraucht.

Umgekehrt zeigen wir jetzt, daß $\eta'_\mu(x)$ für jedes $x \geq 0$ Hauptzahl von $\Phi_{\mu+1}$ ist. Sei $1 < \alpha < \eta'_\mu(x)$. $\eta'_\mu(x)$ ist Hauptzahl von Φ_μ , also gibt es gemäß Satz 1 bzw. Satz 2 ein β mit $1 \leq \beta \leq \eta'_\mu(x)$ und $\eta'_\mu(x) = \Phi_{\mu+1}(\beta, \omega)$. Weiter gibt es ein $\xi \leq \beta$ mit $\alpha < \Phi_{\mu+1}(\xi, \omega) \leq \Phi_{\mu+1}(\beta, \omega)$ und $\xi < \Phi_{\mu+1}(\beta, \omega)$, da im Falle $\beta = \Phi_{\mu+1}(\beta, \omega)$ β Limeszahl ist und im Falle $\beta < \Phi_{\mu+1}(\beta, \omega)$ $\xi = \beta$ gewählt werden kann. Es gilt $1 + \eta'_\mu(x) = \xi + \eta'_\mu(x) = \omega \cdot \eta'_\mu(x) = \eta'_\mu(x)$. Mit Hilfe von Formel (8) erhält man dann:

$$\begin{aligned}\Phi_{\mu+1}(\eta'_\mu(x), \alpha) &\leq \Phi_{\mu+1}(\eta'_\mu(x), \Phi_{\mu+1}(\xi, \omega)) = \Phi_{\mu+1}(\xi + \eta'_\mu(x), \omega) \\ &= \Phi_{\mu+1}(\eta'_\mu(x), \omega) = \eta'_\mu(\eta'_\mu(x)) = \eta'_\mu(x).\end{aligned}$$

Zusammen mit $\Phi_{\mu+1}(\eta'_\mu(x), \alpha) \geq \eta'_\mu(x)$ ergibt sich die Gleichheit beider Terme, d.h. $\eta'_\mu(x)$ ist Hauptzahl von $\Phi_{\mu+1}$.

Damit ist der Satz bewiesen.

Da nun bekanntlich $\eta_3(x) = f_1(x) = f'_0(x)$, falls $f_0(x) = \omega^x$, und aufgrund von Lemma 6 $\forall \eta_\lambda = \bigwedge_{\mu \leq \lambda} \vee \eta_\mu$ gilt, falls λ Limeszahl ist, folgt mit dem eben Bewiesenen unmittelbar:

Satz 4. Für die Normalfunktionen f_μ der μ -kritischen Zahlen ($\mu \geq 1$) gilt $f_\mu = \eta_{2+\mu}$, d.h. also

$$\begin{aligned}f_\mu(x) &= \Phi_{2+\mu+1}(\omega \cdot (1+x), \omega), & \text{falls } \mu \text{ Nachfolgerzahl,} \\ f_\mu(x) &= \Phi_{\mu+1}(1+x, \omega), & \text{falls } \mu \text{ Limeszahl.}\end{aligned}$$

Die Lösungen der Gleichung $f_\mu(0) = \mu$ sind Limeszahlen. Für sie gilt demnach $\mu = f_\mu(0) = \Phi_{\mu+1}(1, \omega) = \Phi_\mu(\omega, \omega)$. Umgekehrt sind auch die Lösungen der Gleichung $\mu = \Phi_\mu(\omega, \omega)$ Limeszahlen. Also gilt schließlich:

Satz 5. Die Gleichungen $f_\mu(0) = \mu$ und $\Phi_\mu(\omega, \omega) = \mu$ haben dieselben Lösungen. Speziell ist die kleinste Lösung der Gleichung $\Phi_\mu(\omega, \omega) = \mu$ die Zahl $\eta(0)$.

§3. Vergleich mit den FINSLERSchen Operationen

In [2] hat FINSLER eine transfinite Folge φ_μ von arithmetischen Operationen aufgestellt. Dabei wird, ausgehend von den elementaren Operationen $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, die Nachfolgerfunktion, Addition, Multiplikation und Potenzierung darstellen, jede Operation φ_μ genauso durch einen iterativen Prozeß definiert wie unsere Operationen ϕ_μ , nämlich:

$$\begin{aligned}\varphi_{\mu+1}(\beta, \alpha) &= \varphi_\mu^\beta(\alpha, \alpha) && \text{für } \mu \geq 3, \\ \varphi_\mu(\beta, \alpha) &= \lim_{\mu' \leq \mu} \varphi_{\mu'}(\beta, \alpha) && \text{für Limeszahlen } \mu.\end{aligned}$$

Der einzige Unterschied zu den Operationen ϕ_μ besteht darin, daß eine andere Iterationsart verwendet wird. Die v -fache Iteration der Funktion φ_μ ist bei FINSLER erklärt durch:

$$\begin{aligned}\varphi_\mu^0(\beta, \alpha) &= \alpha, \\ \varphi_\mu^{v+1}(\beta, \alpha) &= \varphi_\mu(\beta, \varphi_\mu^v(\beta, \alpha)), \\ \varphi_\mu^v(\beta, \alpha) &= \lim_{v' \leq v} \varphi_\mu^{v'}(\beta, \alpha), && \text{falls } v \text{ Limeszahl.}\end{aligned}$$

Hierbei wird also nur in der zweiten Variablen iteriert, während bei den Operationen ϕ_μ eine Iteration in beiden Variablen verwendet wird.

Es ist unmittelbar klar, daß die FINSLERSche Iterationsmethode nicht zu größeren Zahlen führen kann als die Iteration in beiden Variablen, da mit analogen Monotonieeigenschaften wie in den Formeln (1) - (5') gilt:

$$\varphi_\mu(\beta, \varphi_\mu^v(\beta, \alpha)) \leq \varphi_\mu(\varphi_\mu^v(\beta, \alpha), \varphi_\mu^v(\beta, \alpha)),$$

mit anderen Worten, es ist

$$(9) \quad \varphi_\mu^v(\beta, \alpha) \leq \phi_\mu(\beta, \alpha) \quad \text{für alle } \mu, \beta, \alpha \in \mathbb{Z}.$$

LEVITZ [3] hat gezeigt, daß die Lösungen der Gleichung $\varphi_\mu(\omega, \omega) = \mu$ die stark kritischen Zahlen $\kappa(x)$ sind. Das gleiche Ergebnis haben wir in Satz 5 für die Operationen ϕ_μ erhalten. Es gilt also

$$(10) \quad \varphi_{\kappa(\omega)}(\omega, \omega) = \phi_{\kappa(\omega)}(\omega, \omega).$$

Dies zeigt, daß die Werte der Operationen ϕ_μ in gewissem Sinne doch nicht über die Werte der Operationen φ_μ hinausgehen. Eine genaue Abschätzung liefert der

Satz 6. Sei $\mu \geq 4$ und $\mu = 3 + \omega \cdot f + n$ mit $0 \leq f \leq \mu$
 und $0 \leq n < \omega$. Für $\alpha \geq 1$, $\beta \geq 0$ gilt

$$\phi_\mu(\beta, \alpha) \leq \varphi_{\mu+n}(\beta, \alpha)$$

und sogar

$$\phi_\mu(\beta, \alpha) < \varphi_{\mu+n}(\beta, \alpha),$$

falls μ und β keine Limeszahlen sind und $\beta \neq 0$ und $\alpha > 1$ ist.

Beweis: Wir bemerken zunächst, daß die obige Darstellung von μ möglich und eindeutig ist.

Für die Fälle $\alpha = 1$ und $\beta = 0$ sind die entsprechenden Werte gleich (vgl. Satz 9 in FINSLER [2] und den Beweis von Lemma 4 dieser Arbeit), so daß wir für das weitere $\alpha > 1$ und $\beta > 0$ voraussetzen können⁵⁾.

1) Wir zeigen erst: Ist $\mu \geq 4$ Nachfolgerzahl, also

$\mu = 3 + \omega \cdot f + n = 3 + \omega \cdot f + m + 1$ mit $0 \leq m < \omega$ und gilt $\phi_\mu(1, \alpha) \leq \varphi_{\mu+m}(1, \alpha)$, so gilt für dieses μ auch die Aussage des Satzes. Das beweisen wir durch transfinite Induktion nach $\beta \geq 1$:

i) $\beta = 1$. Mit $\varphi_{\mu_1}(1, \alpha) < \varphi_{\mu_2}(1, \alpha)$, falls $\alpha > 1$, $3 \leq \mu_1 < \mu_2$ und μ_1 keine Limeszahl ist (FINSLER [2], Satz 9), ergibt sich $\phi_\mu(1, \alpha) \leq \varphi_{\mu+m}(1, \alpha) < \varphi_{\mu+m+1}(1, \alpha) = \varphi_{\mu+m}(1, \alpha)$.

ii) $\beta = \beta_0 + 1$, $\beta_0 \geq 1$. Für β_0 sei der Satz erfüllt. Dann gilt mit Hilfe von (8), (1) und der Formel (3) entsprechenden Monotonieeigenschaft von $\varphi_{\mu+m}$ (FINSLER [2], Satz 3):

$$\begin{aligned} \phi_\mu(\beta, \alpha) &= \phi_\mu(\beta_0 + 1, \alpha) = \phi_\mu(1, \phi_\mu(\beta_0, \alpha)) \\ &\leq \phi_\mu(1, \varphi_{\mu+n}(\beta_0, \alpha)) \leq \varphi_{\mu+m}(1, \varphi_{\mu+m+1}(\beta_0, \alpha)) \\ &< \varphi_{\mu+m}(\alpha, \varphi_{\mu+m+1}(\beta_0, \alpha)) = \varphi_{\mu+m}(\alpha, \varphi_{\mu+m}^{\beta_0}(\alpha, \alpha)) \\ &= \varphi_{\mu+m}^{\beta_0+1}(\alpha, \alpha) = \varphi_{\mu+n}(\beta, \alpha). \end{aligned}$$

iii) $\beta = \lim_{\beta' < \beta} \beta'$. Mit der Induktionsvoraussetzung $\phi_\mu(\beta', \alpha) \leq \varphi_{\mu+n}(\beta', \alpha)$ folgt: $\phi_\mu(\beta, \alpha) = \lim_{\beta' < \beta} \phi_\mu(\beta', \alpha) \leq \lim_{\beta' < \beta} \varphi_{\mu+n}(\beta', \alpha) = \varphi_{\mu+n}(\beta, \alpha)$.

2) Die obige Behauptung ist damit gezeigt, und wir beweisen jetzt den Satz mit transfiniter Induktion nach μ .

5) Im übrigen gilt auch $\phi_\mu(\beta, 0) = \varphi_\mu(\beta, 0)$ für alle μ , nur paßt dieser Fall wegen $\phi_\mu(\beta, 0) = 1$ und $\varphi_\mu(\beta, 0) = 0$ für $\mu \geq 4$ nicht in die Darstellung von Satz 6.

i) $\mu = 4$. Dann ist in der Darstellung $\mu = 3 + \omega \cdot f + m + 1$
 $f = 0$ und $m = 0$. Nun gilt $\Phi_\mu(1, \alpha) = \Phi_4(1, \alpha) = \alpha^\alpha =$
 $\Psi_4(1, \alpha) = \Psi_{\mu+m}(1, \alpha)$, also folgt nach 1) die Aussage des
 Satzes für $\mu = 4$.

ii) Sei die Aussage für $\mu = 3 + \omega \cdot f + n$ als richtig voraus-
 gesetzt. Um sie für $\mu + 1 = 3 + \omega \cdot f + n + 1$ zu beweisen, muß
 nach 1) nur gezeigt werden, daß gilt: $\Phi_{\mu+1}(1, \alpha) \leq \Psi_{\mu+1+n}(1, \alpha)$.
 Das ist aber erfüllt:

$$\Phi_{\mu+1}(1, \alpha) = \Phi_\mu(\alpha, \alpha) \leq \Psi_{\mu+n}(\alpha, \alpha) = \Psi_{\mu+1+n}(1, \alpha).$$

iii) Sei μ Limeszahl, d.h. $\mu = \omega \cdot f$, $f > 0$. Der Satz gelte
 für $\mu' < \mu$.

Fall a. $f = f' + 1$, $f' > 0$. Dann gilt

$$\mu = \omega \cdot f = \omega \cdot f' + \omega = \lim_{n < \omega} (3 + \omega \cdot f' + n), \text{ also:}$$

$$\begin{aligned} \Phi_\mu(\beta, \alpha) &= \lim_{n < \omega} \Phi_{3+\omega \cdot f' + n}(\beta, \alpha) \leq \lim_{n < \omega} \Psi_{3+\omega \cdot f' + n + n}(\beta, \alpha) \\ &= \Psi_{\omega \cdot f' + \omega}(\beta, \alpha) = \Psi_\mu(\beta, \alpha). \end{aligned}$$

Fall b. $f = \lim_{f' < f} f'$. Dann gilt $\mu = \omega \cdot f = \lim_{f' < f} (\omega \cdot f')$, also:

$$\Phi_\mu(\beta, \alpha) = \lim_{f' < f} \Phi_{\omega \cdot f'}(\beta, \alpha) \leq \lim_{f' < f} \Psi_{\omega \cdot f'}(\beta, \alpha) = \Psi_\mu(\beta, \alpha).$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Für Limeszahlindex λ folgt aus diesem Satz zusammen mit
 (9) die Gleichheit der beiden Operationen Φ_λ und Ψ_λ , d.h.
 es gilt:

$$(11) \quad \Phi_\lambda(\beta, \alpha) = \Psi_\lambda(\beta, \alpha) \quad \text{für } \alpha, \beta \in \mathbb{Z}, \text{ falls } \lambda \text{ Limeszahl,}$$

woraus sich schließlich die spezielle Gleichung (10) und damit
 der Zusammenhang zwischen dem Ergebnis von LEVITZ [3] und
 unserem Satz 5 ergeben.

§4. Die SAARNIOSchen einstelligen Operationen

In [4] hat SAARNIO eine transfinite Folge von arithmetischen
 Operationen aufgestellt. Dieses System beginnt mit den
einstelligen Operationen, die durch ein Symbol $\mathfrak{v}$ dargestellt
 werden. Dabei durchläuft $\mathfrak{v}$ alle Ordinalzahlen > 1 bis zu

einer noch anzugebenden Zahl, die Grundzahl des Systems genannt wird. Man braucht diese Einschränkung jedoch zunächst nicht zu beachten und kann die folgenden Betrachtungen für alle $\vartheta \in \mathbb{Z}$ mit $\vartheta \geq 1$ durchführen. Der Wert, den man bei Anwendung der Operation $[\vartheta]$ auf das geordnete Paar (β, α) von Ordinalzahlen erhält, wird mit $\beta[\vartheta]\alpha$ bezeichnet.

Die Operationen $[\vartheta]$ werden auf folgende Weise definiert:

$$\beta[1]\alpha = \beta + \alpha$$

$$\beta[2]\alpha = \beta \cdot \alpha$$

$$\beta[3]\alpha = \alpha^\beta,$$

für die "höheren" Operationen:

$$(12) \quad 1[\vartheta + 1]\alpha = \alpha$$

$$(13) \quad (p + 1)[\vartheta + 1]\alpha = p[\vartheta + 1]\alpha[\vartheta]\alpha \quad \text{für } 1 \leq p < \omega$$

$$(14) \quad \beta[\vartheta + 1]\alpha = \lim_{\xi < \beta} (\xi[\vartheta + 1]\alpha), \quad \text{falls } \beta \text{ Limeszahl}$$

$$(15) \quad (\beta + p + 1)[\vartheta + 1]\alpha = (\beta + p)[\vartheta + 1]\alpha[\vartheta]\beta[\vartheta + 1]\alpha \quad \text{für } 0 \leq p < \omega, \\ \text{falls } \beta \text{ Limeszahl,}$$

und falls ϑ Limeszahl:

$$(16) \quad 1[\vartheta]\alpha = \lim_{\vartheta' < \vartheta} (\alpha[\vartheta']\alpha)$$

$$(17) \quad (\beta + 1)[\vartheta]\alpha = 1[\vartheta](\beta[\vartheta]\alpha) \quad \text{für } \beta \geq 1$$

$$(18) \quad \beta[\vartheta]\alpha = \lim_{\xi < \beta} (\xi[\vartheta]\alpha), \quad \text{falls } \beta \text{ Limeszahl.}$$

Dabei ist beim Auftreten von mehreren Operationssymbolen in einem Ausdruck zu beachten, daß die Operation $[\vartheta]$ "stärker bindet" als die Operation $[\vartheta']$, falls $\vartheta > \vartheta'$ ist.

Wir wollen an dieser Stelle einige Erläuterungen zu dem Konstruktionsprinzip dieser Operationen einfügen. Für endliche Argumente β wird dabei ein Iterationsprozeß verwendet, der in Analogie zu den in den vorigen Paragraphen betrachteten Iterationen steht. Betrachten wir nämlich einmal die der Potenzierung folgende Operation $[4]$ und schreiben $\gamma_3(\beta, \alpha)$ für α^β und $\gamma_4(\beta, \alpha)$ für $\beta[4]\alpha$. Definieren wir als Iteration in der ersten Variablen ($n < \omega$):

$$\gamma_3^0(\beta, \alpha) = \beta$$

$$\gamma_3^{n+1}(\beta, \alpha) = \gamma_3(\gamma_3^n(\beta, \alpha), \alpha),$$

so erhält man mit der Definition

$$\mathcal{V}_4(n, \alpha) = \mathcal{V}_3^n(\alpha, \alpha)$$

tatsächlich die Gleichungen $\mathcal{V}_4(0, \alpha) = \alpha$ und

$$\mathcal{V}_4(n+1, \alpha) = \mathcal{V}_3(\mathcal{V}_4(n, \alpha), \alpha),$$

die den Rekursionsgleichungen (12) und (13) entsprechen.

Es handelt sich hierbei um eine Iteration in der Basis der Potenz im Gegensatz zu den FINSLERSchen Operationen, wo in der zweiten Variablen, in diesem Falle im Exponenten, iteriert wird. Es ist also etwa

$$2[4]\omega = \omega^\omega, \quad 3[4]\omega = \omega^{\omega^\omega}, \quad 4[4]\omega = \omega^{\omega^{\omega^\omega}} \text{ usw.},$$

$$\text{aber } \varphi_4(1, \omega) = \omega^\omega, \quad \varphi_4(2, \omega) = (\omega^\omega)^\omega, \quad \varphi_4(3, \omega) = ((\omega^\omega)^\omega)^\omega \text{ usw.}$$

Weiter ist $\omega[4]\omega = \xi_0$. Würde man nun auf diese Weise (in der Basis) weiteriterieren, so erhielte man jedoch keine größeren Zahlen, denn es ist ja $\omega^{\xi_0} = \xi_0$. Daraus erklärt sich die zunächst etwas unmotiviert erscheinende Definitionsgleichung (15). Man erhält nun nämlich

$$(\omega+1)[4]\omega = \omega[4]\omega[3]\omega[4]\omega = \xi_0[3]\xi_0 = \xi_0^{\xi_0},$$

$$(\omega+2)[4]\omega = (\omega+1)[4]\omega[3]\omega[4]\omega = \xi_0^{\xi_0^{\xi_0}} \text{ usw.},$$

d.h. man iteriert mit dem bereits erreichten Argument ξ_0 weiter.

Schließlich wollen wir an diesen Beispielen zeigen, was man bei der Iteration in beiden Variablen, also durch die Operationen ϕ_μ erhält. Es ist

$$\phi_4(1, \omega) = \omega^\omega, \quad \phi_4(2, \omega) = (\omega^\omega)^{\omega^\omega} = \omega^{\omega \cdot \omega^\omega} = \omega^{\omega^\omega},$$

$$\phi_4(3, \omega) = (\omega^{\omega^{\omega^\omega}})^{\omega^{\omega^{\omega^\omega}}} = \omega^{\omega^\omega \cdot \omega^{\omega^\omega}} = \omega^{\omega^{\omega^\omega}}, \dots$$

$$\phi_4(\omega, \omega) = \xi_0, \quad \phi_4(\omega+1, \omega) = \phi_3(\phi_4(\omega, \omega), \phi_4(\omega, \omega)) = \xi_0^{\xi_0},$$

$$\phi_4(\omega+2, \omega) = \phi_3(\xi_0^{\xi_0}, \xi_0^{\xi_0}) = \xi_0^{\xi_0^{\xi_0}} \text{ usw.}$$

Die Operationen $[4]$ und ϕ_4 haben also für die betrachteten Argumente gleiche Werte. Diese Beziehung wollen wir in einen größeren Zusammenhang stellen, indem wir behaupten:

Satz 7. Sei $\nu \geq 4$, $\alpha \geq \omega$, $\beta \geq 1$. Dann gilt:

- | | | |
|----|--|--------------------------------------|
| a) | $\beta [\nu] \alpha = \Phi_{-1, \nu+1}(-1 + \beta, \alpha),$ | falls ν Nachfolgerzahl, |
| b) | $\beta [\nu] \alpha = \Phi_{\nu, 1}(\beta, \alpha),$ | falls ν Limeszahl. ⁶⁾ |

Diesen Satz könnte man verhältnismäßig einfach beweisen, wenn man folgende bei SAARNIO angegebenen Gleichungen benutzte:

$$(p+1) [\nu+1] (\beta [\nu+1] \alpha) = (\beta+p) [\nu+1] \alpha,$$

$$\gamma [\nu+1] (\beta [\nu+1] \alpha) = (\beta+\gamma) [\nu+1] \alpha,$$

wobei $0 \leq p < \omega$, $\beta \geq 1$, $\gamma \geq \omega$, $\alpha \geq \omega$, $\nu \geq 3$ vorausgesetzt ist.

Diese (in [4] unbewiesenen) Gleichungen entsprechen der Gleichung (8) von §1, und damit ergäbe sich Satz 7. Wir wollen zum Beweis jedoch nur die Definitionsgleichungen der SAARNIOSchen Operationen benutzen. Dazu zeigen wir in zwei Lemmatis, daß die Operationen Φ_γ diesen Gleichungen genügen. Dabei ergibt sich der wesentliche Vorteil, daß diese Lemmatis auch bei der Untersuchung der "mehrstelligen" Operationen in den folgenden Paragraphen verwendet werden können.

Vorausschickend notieren wir:

$$(19) \quad \Phi_{\mu+1}(\beta, \alpha) + \Phi_{\mu+1}(\gamma, \alpha) = \Phi_{\mu+1}(\gamma, \alpha) \quad \text{für } \mu \geq 3, \alpha \geq \omega, \beta < \gamma.$$

Beweis: Mit $\beta < \gamma$ ist $\beta+1 \leq \gamma$ und damit

$$\Phi_{\mu+1}(\beta+1, \alpha) \leq \Phi_{\mu+1}(\gamma, \alpha), \text{ also gibt es ein } \delta_1 \geq 0 \text{ mit}$$

$$\Phi_{\mu+1}(\gamma, \alpha) = \Phi_{\mu+1}(\beta+1, \alpha) + \delta_1. \text{ Setzt man } \xi = \Phi_{\mu+1}(\beta, \alpha),$$

$$\text{so ist } \Phi_{\mu+1}(\beta+1, \alpha) = \Phi_\mu(\xi, \xi) > \Phi_2(\xi, \xi) = \xi \cdot \xi. \text{ Es gibt}$$

$$\text{also weiter ein } \delta_2 > 0 \text{ mit } \Phi_{\mu+1}(\beta+1, \alpha) = \xi \cdot \xi + \delta_2.$$

Es gilt $\xi + \xi \cdot \xi = \xi \cdot (1 + \xi) = \xi \cdot \xi$, da ja $\xi \geq \omega$ ist, und somit erhält man:

$$\begin{aligned} \Phi_{\mu+1}(\beta, \alpha) + \Phi_{\mu+1}(\gamma, \alpha) &= \xi + \Phi_{\mu+1}(\beta+1, \alpha) + \delta_1 = \xi + \xi \cdot \xi + \delta_2 + \delta_1 \\ &= \xi \cdot \xi + \delta_2 + \delta_1 = \Phi_{\mu+1}(\gamma, \alpha). \end{aligned}$$

Lemma 7. Sei $\alpha \geq \omega$, $0 \leq p < \omega$, $\beta = 0$ oder β Limeszahl.

Dann gilt: $\Phi_4(\beta+p+1, \alpha) = \Phi_3(\Phi_4(\beta+p, \alpha), \Phi_4(\beta, \alpha)).$

- 6) Dabei ist für $\gamma \geq 1$ die Zahl $-1 + \gamma$ wie üblich definiert
als $-1 + \gamma = \begin{cases} \gamma, & \text{falls } \gamma \geq \omega, \\ \gamma_1, & \text{falls } 1 \leq \gamma = \gamma_1 + 1 < \omega. \end{cases}$

Beweis durch vollständige Induktion nach p :

Zunächst bemerken wir, daß für beliebiges $\gamma \geq 0$ und $\alpha \geq \omega$ gilt:

$$\begin{aligned}\Phi_4(\gamma, \alpha) \cdot \Phi_4(\gamma + 1, \alpha) &= \Phi_4(\gamma, \alpha) \cdot \Phi_3(\Phi_4(\gamma, \alpha), \Phi_4(\gamma, \alpha)) \\ &= \Phi_3(1 + \Phi_4(\gamma, \alpha), \Phi_4(\gamma, \alpha)) \\ &= \Phi_3(\Phi_4(\gamma, \alpha), \Phi_4(\gamma, \alpha)) = \Phi_4(\gamma + 1, \alpha),\end{aligned}$$

da $\Phi_4(\gamma, \alpha) \geq \omega$.

Für $p = 0$ ist das Lemma trivial. Sei $p = p_0 + 1$ und das Lemma für p_0 als richtig vorausgesetzt. Dann gilt mit der eben angegebenen Gleichung:

$$\begin{aligned}\Phi_4(\beta + p + 1, \alpha) &= \Phi_3(\Phi_4(\beta + p_0 + 1, \alpha), \Phi_4(\beta + p_0 + 1, \alpha)) \\ &= \Phi_3(\Phi_4(\beta + p_0 + 1, \alpha), \Phi_3(\Phi_4(\beta + p_0, \alpha), \Phi_4(\beta, \alpha))) \\ &= \Phi_3(\Phi_4(\beta + p_0, \alpha) \cdot \Phi_4(\beta + p_0 + 1, \alpha), \Phi_4(\beta, \alpha)) \\ &= \Phi_3(\Phi_4(\beta + p, \alpha), \Phi_4(\beta, \alpha)).\end{aligned}$$

Lemma 8. Sei $\gamma \geq 3$, $\alpha \geq \omega$, $0 \leq p < \omega$, $\beta = 0$ oder β Limeszahl.

Dann gilt: $\Phi_{\beta+2}(\beta + p + 1, \alpha) = \Phi_{\beta+4}(\Phi_{\beta+2}(\beta + p, \alpha), \Phi_{\beta+2}(\beta, \alpha))$.

Beweis durch vollständige Induktion nach p :

Der Fall $p = 0$ ist trivial. Sei $p = p_0 + 1$ und das Lemma für p_0 als richtig vorausgesetzt. Dann folgt mit Hilfe von (3) und (19):

$$\begin{aligned}\Phi_{\beta+2}(\beta + p + 1, \alpha) &= \Phi_{\beta+4}(\Phi_{\beta+2}(\beta + p_0 + 1, \alpha), \Phi_{\beta+2}(\beta + p_0 + 1, \alpha)) \\ &= \Phi_{\beta+4}(\Phi_{\beta+2}(\beta + p_0 + 1, \alpha), \Phi_{\beta+4}(\Phi_{\beta+2}(\beta + p_0, \alpha), \Phi_{\beta+2}(\beta, \alpha))) \\ &= \Phi_{\beta+4}(\Phi_{\beta+2}(\beta + p_0, \alpha) + \Phi_{\beta+2}(\beta + p_0 + 1, \alpha), \Phi_{\beta+2}(\beta, \alpha)) \\ &= \Phi_{\beta+4}(\Phi_{\beta+2}(\beta + p, \alpha), \Phi_{\beta+2}(\beta, \alpha)).\end{aligned}$$

Mit diesen beiden Lemmata erhält man für jede Nachfolgerzahl $\gamma \geq 3$ (und $\alpha \geq \omega$) explizit:

$$(20) \quad \Phi_{\beta+4}(0, \alpha) = \alpha$$

$$(21) \quad \Phi_{\beta+4}(p + 1, \alpha) = \Phi_{\beta}(\Phi_{\beta+4}(p, \alpha), \alpha) \quad \text{für } 0 \leq p < \omega$$

$$(22) \quad \Phi_{\beta+4}(\beta, \alpha) = \lim_{\xi < \beta} \Phi_{\beta+4}(\xi, \alpha), \quad \text{falls } \beta \text{ Limeszahl}$$

$$(23) \quad \Phi_{\beta+4}(\beta + p + 1, \alpha) = \Phi_{\beta}(\Phi_{\beta+4}(\beta + p, \alpha), \Phi_{\beta+4}(\beta, \alpha)) \quad \text{für } 0 \leq p < \omega, \\ \text{falls } \beta \text{ Limeszahl.}$$

Ist ϑ Limeszahl, so gilt sogar für alle $\alpha \in \mathbb{Z}$:

$$(24) \quad \Phi_{\vartheta+1}(1, \alpha) = \lim_{\beta \in \mathbb{Z}} \Phi_{\vartheta}(\alpha, \alpha)$$

$$(25) \quad \Phi_{\vartheta+1}(\beta + 1, \alpha) = \Phi_{\vartheta+1}(1, \Phi_{\vartheta+1}(\beta, \alpha))$$

$$(26) \quad \Phi_{\vartheta+1}(\beta, \alpha) = \lim_{\xi \in \beta} \Phi_{\vartheta+1}(\xi, \alpha), \quad \text{falls } \beta \text{ Limeszahl.}$$

Durch transfinite Induktion nach ϑ können wir nun den Beweis von Satz 7 vollenden. Gilt für ein festes ϑ der Satz mit der Anfangszahl $\beta = 1$, so gilt er für dieses ϑ aufgrund der eben gezeigten Gleichheit der Rekursionsformeln bezüglich β auch für alle $\beta \geq 1$. Diese Bedingung ist erfüllt, denn für jede Nachfolgerzahl $\vartheta \geq 4$ ist $1[\vartheta]\alpha = \alpha = \Phi_{-1+\vartheta+1}(-1+1, \alpha)$, und ist ϑ Limeszahl, und setzt man die Richtigkeit des Satzes für $\vartheta' < \vartheta$ voraus, so hat man:

$$1[\vartheta]\alpha = \lim_{\beta \in \vartheta} \alpha[\vartheta']\omega = \lim_{\beta \in \vartheta} \Phi_{-1+\vartheta'+1}(\alpha, \alpha) = \Phi_{\vartheta}(\alpha, \alpha) = \Phi_{\vartheta+1}(1, \alpha).$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Sehr leicht lassen sich jetzt die Ergebnisse von §2 übersetzen. So ergeben sich für $\vartheta \geq 3$ die Hauptzahlen ω der Operation $[\vartheta]$, d.h. die Zahlen $\eta > \omega$ mit $\eta[\vartheta]\alpha = \eta$ für $1 < \alpha < \eta$ als Werte der Funktion

$$\eta_{\vartheta}^{\omega}(x) = \omega \cdot (1+x) [\vartheta+1]\omega.$$

Die Lösungen der Gleichung $1[\vartheta]\omega = \vartheta$ sind dieselben wie die Lösungen der Gleichung $\Phi_{\vartheta+1}(1, \omega) = \Phi_{\vartheta}(\omega, \omega) = \vartheta$, also die stark kritischen Zahlen $\kappa(x)$.

Wie oben schon kurz angemerkt, wird in dem SAARNIOSchen System der Wertebereich von ϑ in dem Operationssymbol $[\vartheta]$ begrenzt durch die sog. Grundzahl des Systems, die mit $1[1,0]\omega$ bezeichnet wird (die Bedeutung dieser Bezeichnung wird im nächsten Paragraphen klar werden), d.h. in $[\vartheta]$ ist $1 \leq \vartheta < 1[1,0]\omega$. Diese Zahl $1[1,0]\omega$ ergibt sich als Limes der wachsenden Folge $1[\omega]\omega$, $1[1[\omega]\omega]\omega$, $1[1[1[\omega]\omega]\omega]\omega$, ..., also

$$1[1,0]\omega = \lim_{n \in \mathbb{N}} \vartheta_n, \quad \text{wobei } \vartheta_1 = \omega, \quad \vartheta_{n+1} = 1[\vartheta_n]\omega,$$

und ist die kleinste Zahl, die sich im System der einstelligen Operationen nicht mehr "durch kleinere Zahlen darstellen" läßt (siehe §7).

Jedes ϑ_n ist Limeszahl, daher ist $\vartheta_{n+1} = \Phi_{\vartheta_n+1}(1, \omega) = \Phi_{\vartheta_n}(\omega, \omega)$.

Damit folgt:

$$\phi_{1[1,0]\omega}(\omega, \omega) = \lim_{n < \omega} \phi_{\mathfrak{V}_n}(\omega, \omega) = \lim_{n < \omega} \mathfrak{V}_{n+1} = 1[1,0]\omega,$$

also ist $1[1,0]\omega$ Lösung der Gleichung $\phi_{\mu}(\omega, \omega) = \mu$. Ist μ andererseits solch eine Lösung, so ist $\mu > \omega = \mathfrak{V}_0$, und setzt man $\mu > \mathfrak{V}_n$ voraus, so folgt $\mu = \phi_{\mathfrak{V}_n}(\omega, \omega) > \phi_{\mathfrak{V}_n}(\omega, \omega) = \mathfrak{V}_{n+1}$, also ist $\mu > \mathfrak{V}_n$ für $n < \omega$ und somit $\mu \geq 1[1,0]\omega$. $1[1,0]\omega$ ist also die kleinste Lösung der Gleichung $\phi_{\mu}(\omega, \omega) = \mu$, d.h.:

Satz 8. Die Grundzahl $1[1,0]\omega$ des SAARNIOSchen Systems ist die Zahl $\kappa(0)$.

§5. Die SAARNIOSchen mehrstelligen Operationen

Mit der Bildung der Zahl $1[1,0]\omega$ wird eine neue Art von Operation erschlossen, die statt durch eine Ordinalzahl durch ein geordnetes Paar bzw. allgemeiner durch ein geordnetes n -Tupel von Ordinalzahlen gekennzeichnet ist. Wichtig ist dabei, an welcher "Stelle" eine bestimmte Zahl in dem Operationssymbol steht. Man zählt von rechts: Die Zahl 0 steht im Symbol $[1,0]$ an erster Stelle, die Zahl 1 an zweiter Stelle, und so zählt man fort. Die Stellennummer schreiben wir im weiteren über die entsprechende Zahl, und mit einer Null besetzte Stellen lassen wir auch weg. Das obige Symbol wird also auch so geschrieben: $[1]_1$. Man läßt auch transfinite Stellenzahlen zu, und da die Anzahl der Stellen, die mit von 0 verschiedenen Zahlen besetzt sind, immer endlich ist, sieht das allgemeine mehrstellige Operationssymbol so aus:

$$[\mathfrak{V}_n, \dots, \mathfrak{V}_2, \mathfrak{V}_1].$$

Dabei gilt für die Ordinalzahlen $\mathfrak{V}_i$: $1 \leq \mathfrak{V}_1 < \mathfrak{V}_2 < \dots < \mathfrak{V}_n$. Der Wertbereich der $\mathfrak{V}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) wird wie bei den einstelligen Symbolen begrenzt durch die Grundzahl $1[1,0]\omega$, also: $0 \leq \mathfrak{V}_i < 1[1,0]\omega$ für $i = 1, 2, \dots, n$. Außerdem soll natürlich sein $\mathfrak{V}_j > 0$ für mindestens einen Index j .

So wie die Zahl $1[1^2, 0^1]\omega$ sich dadurch ergibt, daß ϑ in dem Ausdruck $1[\vartheta]\omega$ (der im allgemeineren Rahmen nun auch $1[\vartheta^1]\omega$ geschrieben werden kann) alle Zahlen durchläuft, die kleiner als die Grundzahl sind, und $1[1^2, 0^1]\omega$ die kleinste Zahl ist, die größer als alle solche Zahlen $1[\vartheta^1]\omega$ ist, so werden auch die weiteren mehrstelligen Symbole gebildet. Durchläuft eine Zahl ϑ_i an einer Stelle v_i alle Zahlen bis zur Grundzahl, und ist die Stelle $v_i + 1$ mit einer Zahl ϑ_j besetzt, so ergibt sich durch Limesbildung dasjenige Operationssymbol, das an allen Stellen v mit $1 \leq v \leq v_i$ mit 0 und an der Stelle $v_i + 1$ mit $\vartheta_j + 1$ besetzt ist. Besetzungen mit Limeszahlen und Limeszahl-Stellennummern ergeben sich jeweils durch Limesbildung.

Ein derartiges System von Operationen kann auch auf andere Grundzahlen aufgebaut werden. Wir wollen in den folgenden Betrachtungen den allgemeinen Fall einer Grundzahl σ zugrunde legen. Wir verlangen nur, daß σ Limeszahl ist. Das auf der Grundzahl σ aufgebaute SAARNIOSche System bezeichnen wir mit $S(\sigma)$.

Die Operation $\beta[\vartheta_n^1, \dots, \vartheta_2^1, \vartheta_1^1]\alpha$, $1 \leq v_1 < v_2 < \dots < v_n$, $0 \leq \vartheta_i < \sigma$ ($i = 1, 2, \dots, n$), $\vartheta_j > 0$ für mindestens ein j , läßt sich durch folgende Rekursionsgleichungen charakterisieren:

$$(27) \quad 1[\vartheta_n^1, \dots, (\vartheta_1^1 + 1)]\alpha = \alpha$$

$$(28) \quad (p+1)[\vartheta_n^1, \dots, (\vartheta_1^1 + 1)]\alpha = (p[\vartheta_n^1, \dots, (\vartheta_1^1 + 1)]\alpha)[\vartheta_n^1, \dots, \vartheta_1^1]\alpha$$

für $1 \leq p < \omega$

$$(29) \quad \beta[\vartheta_n^1, \dots, (\vartheta_1^1 + 1)]\alpha = \lim_{j < \beta} (\beta[\vartheta_n^1, \dots, (\vartheta_1^1 + 1)]\alpha),$$

falls β Limeszahl

$$(30) \quad (\beta + p + 1)[\vartheta_n^1, \dots, (\vartheta_1^1 + 1)]\alpha =$$

$$((\beta + p)[\vartheta_n^1, \dots, (\vartheta_1^1 + 1)]\alpha)[\vartheta_n^1, \dots, \vartheta_1^1](\beta[\vartheta_n^1, \dots, (\vartheta_1^1 + 1)]\alpha),$$

für $0 \leq p < \omega$, falls β Limeszahl.

Falls η_1 Limeszahl, so gilt:

$$(31) \quad 1[\overset{\eta_1}{\eta}_n, \dots, \overset{1}{\eta}_1]\alpha = \lim_{\xi < \overset{1}{\eta}_1} (\alpha[\overset{\eta_1}{\eta}_n, \dots, \xi]\alpha)$$

$$(32) \quad (\beta + 1)[\overset{\eta_1}{\eta}_n, \dots, \overset{1}{\eta}_1]\alpha = 1[\overset{\eta_1}{\eta}_n, \dots, \overset{1}{\eta}_1](\beta[\overset{\eta_1}{\eta}_n, \dots, \overset{1}{\eta}_1]\alpha) \\ \text{für } \beta \geq 1$$

$$(33) \quad \beta[\overset{\eta_1}{\eta}_n, \dots, \overset{1}{\eta}_1]\alpha = \lim_{\xi < \beta} (\xi[\overset{\eta_1}{\eta}_n, \dots, \overset{1}{\eta}_1]\alpha), \\ \text{falls } \beta \text{ Limeszahl.}$$

Für $\eta_1 > 1$ gelten die Rekursionsgleichungen

$$(34) \quad (\beta + 1)[\overset{\eta_1}{\eta}_n, \dots, \overset{\eta_1}{\eta}_1]\alpha = 1[\overset{\eta_1}{\eta}_n, \dots, \overset{\eta_1}{\eta}_1](\beta[\overset{\eta_1}{\eta}_n, \dots, \overset{\eta_1}{\eta}_1]\alpha) \\ \text{für } \beta \geq 1$$

$$(35) \quad \beta[\overset{\eta_1}{\eta}_n, \dots, \overset{\eta_1}{\eta}_1]\alpha = \lim_{\xi < \beta} (\xi[\overset{\eta_1}{\eta}_n, \dots, \overset{\eta_1}{\eta}_1]\alpha), \\ \text{falls } \beta \text{ Limeszahl,}$$

und als "Rekursionsanfänge":

$$(36) \quad 1[\overset{\eta_1}{\eta}_n, \dots, (\overset{\eta_1+1}{\eta}_1+1)]\alpha = \lim_{\xi < \overset{\eta_1+1}{\eta}_1} (1[\overset{\eta_1}{\eta}_n, \dots, \overset{(\eta_1+1)}{\eta}_1, \xi]\alpha) \quad 7)$$

$$(37) \quad 1[\overset{\eta_1}{\eta}_n, \dots, (\overset{\eta_1}{\eta}_1+1)]\alpha = \lim_{\xi < \overset{\eta_1}{\eta}_1} (1[\overset{\eta_1}{\eta}_n, \dots, \overset{\eta_1}{\eta}_1, \xi]\alpha), \\ \text{falls } \eta_1 \text{ Limeszahl}$$

$$(38) \quad 1[\overset{\eta_1}{\eta}_n, \dots, \overset{\eta_1}{\eta}_1]\alpha = \lim_{\xi < \overset{\eta_1}{\eta}_1} (1[\overset{\eta_1}{\eta}_n, \dots, \xi]\alpha), \\ \text{falls } \eta_1 \text{ Limeszahl.}$$

Diese Bildungsgesetze der mehrstelligen Operationssymbole beruhen auf der Polynombildung mit der Basis ϵ . Ist $\mu \geq 1$ eine beliebige Ordinalzahl, so läßt sich μ bekanntlich eindeutig in der Form

$$\mu = \epsilon^{\alpha_m} \cdot \eta_m + \dots + \epsilon^{\alpha_2} \cdot \eta_2 + \epsilon^{\alpha_1} \cdot \eta_1$$

darstellen, wobei $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_m \leq \mu$, $1 \leq \eta_i < \epsilon$, $1 \leq m < \omega$ gilt.

Nach dieser Vorbemerkung formulieren wir:

7) Bei $\eta_1 = 1$ kann es vorkommen, daß dieser Limes nicht existiert, so daß man zur Limesbildung nur gewisse Teilfolgen ξ_n zulassen dürfte. Da keine Mißverständnisse zu befürchten sind, wollen wir es trotzdem bei dieser etwas ungenauen Bezeichnung belassen.

Satz 9. Sei $\alpha \geq \omega$, $\beta \geq 1$, $1 \leq n < \omega$, $1 \leq \nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_n$, $1 \leq \eta_i < \epsilon$

für $1 \leq i \leq n$ und $\mu = \epsilon^{-1+\nu_n} \cdot \eta_n + \dots + \epsilon^{-1+\nu_2} \cdot \eta_2 + \epsilon^{-1+\nu_1} \cdot \eta_1 \geq 4$.

Dann gilt im SAARNIOSchen System $S(\epsilon)$:

$$\text{a) } \beta[\overset{\nu_n}{\eta_n}, \dots, \overset{\nu_1}{\eta_1}] \alpha = \Phi_{-1, \mu+1}(-1 + \beta, \alpha),$$

falls $\nu_1 = 1$ und η_1 Nachfolgerzahl

$$\text{b) } \beta[\overset{\nu_n}{\eta_n}, \dots, \overset{\nu_1}{\eta_1}] \alpha = \Phi_{\mu+1}(\beta, \alpha) \quad \text{in allen anderen Fällen.}$$

Beweis durch transfinite Induktion nach μ :

Ist $\nu_1 = 1$ (was insbesondere bei Nachfolgerzahlen μ der Fall ist), so ergibt sich die Richtigkeit der Aussage wie bei Satz 7 aufgrund der Gleichheit der Rekursionsformeln (20) - (26) und (27) - (33).

Sei nun μ Limeszahl und $\nu_1 > 1$. Auch in diesem Fall stimmen die entsprechenden Rekursionsformeln (25), (26) und (34), (35). überein. Zu zeigen bleibt also nur noch, daß auch die jeweiligen Anfangswerte gleich sind, d.h. daß gilt

$$1[\overset{\nu_n}{\eta_n}, \dots, \overset{\nu_1}{\eta_1}] \alpha = \Phi_{\mu+1}(1, \alpha).$$

Fall 1. $\nu_1 = \eta_1 + 1$, $\eta_1 \geq 0$.

Fall 1.1. $\nu_1 = \nu + 1$, $\nu \geq 1$. Dann ist

$$\begin{aligned} \mu &= \epsilon^{-1+\nu_n} \cdot \eta_n + \dots + \epsilon^{-1+\nu_1} \cdot \eta_1 + \epsilon^{-1+\nu} \cdot \epsilon \\ &= \lim_{\xi < \epsilon} (\epsilon^{-1+\nu_n} \cdot \eta_n + \dots + \epsilon^{-1+\nu_1} \cdot \eta_1 + \epsilon^{-1+\nu} \cdot \xi). \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Induktionsvoraussetzung gilt also:

$$\begin{aligned} \Phi_{\mu+1}(1, \alpha) &= \Phi_{\mu}(\alpha, \alpha) \\ &= \lim_{\xi < \epsilon} \Phi_{\epsilon^{-1+\nu_n} \cdot \eta_n + \dots + \epsilon^{-1+\nu_1} \cdot \eta_1 + \epsilon^{-1+\nu} \cdot \xi}(\alpha, \alpha) \\ &= \lim_{\xi < \epsilon} \Phi_{\epsilon^{-1+\nu_n} \cdot \eta_n + \dots + \epsilon^{-1+\nu_1} \cdot \eta_1 + \epsilon^{-1+\nu} \cdot \xi + 1}(1, \alpha) \\ &= \lim_{\xi < \epsilon} (1[\overset{\nu_n}{\eta_n}, \dots, \overset{\nu_1}{\eta_1}, \xi] \alpha) \\ &= 1[\overset{\nu_n}{\eta_n}, \dots, \overset{\nu_1}{\eta_1}] \alpha. \end{aligned}$$

Fall 1.2. ν_1 Limeszahl. Dann ist

$$\mu = \lim_{\nu < \nu_1} (\epsilon^{\nu} \cdot \eta_n + \dots + \epsilon^{\nu_1} \cdot \eta_1 + \epsilon^{\nu}), \quad \text{also:}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{\mu+1}(1, \alpha) &= \lim_{\nu < \nu_1} \Phi_{\epsilon^{\nu} \cdot \eta_n + \dots + \epsilon^{\nu_1} \cdot \eta_1 + \epsilon^{\nu} + 1}(1, \alpha) \\ &= \lim_{\nu < \nu_1} (1[\overset{\nu_n}{\eta_n}, \dots, \overset{\nu_1}{\eta_1}, \nu] \alpha) = 1[\overset{\nu_n}{\eta_n}, \dots, \overset{\nu_1}{\eta_1}] \alpha. \end{aligned}$$

Fall 2. $\mathfrak{G}$ Limeszahl. Dann ist

$$\mu = \lim_{\xi < \mathfrak{G}} (\sigma^{-1+\mathfrak{V}_\xi} \cdot \mathfrak{V}_\xi + \dots + \sigma^{-1+\mathfrak{V}_\xi} \cdot \xi), \text{ also:}$$

$$\begin{aligned} \phi_{\mu+1}(1, \alpha) &= \lim_{\xi < \mathfrak{G}} \phi_{\sigma^{-1+\mathfrak{V}_\xi} \cdot \mathfrak{V}_\xi + \dots + \sigma^{-1+\mathfrak{V}_\xi} \cdot \xi + 1}(1, \alpha) \\ &= \lim_{\xi < \mathfrak{G}} (1[\mathfrak{V}_\xi, \dots, \xi]\alpha) = 1[\mathfrak{V}_\xi, \dots, \mathfrak{V}_\xi]\alpha. \end{aligned}$$

Damit ist Satz 9 bewiesen.

Der Ausdruck $1[1]^\mathfrak{x}\omega$ ist eine Normalfunktion in $\mathfrak{x}$. Die kritischen Zahlen dieser Funktion, d.h. also die Lösungen der Gleichung $1[1]^\mathfrak{x}\omega = \mathfrak{x}$ bezeichnet SAARNIO (der Größe nach geordnet) mit $\gamma(\xi)$, $\xi \geq 1$ und nennt sie die "kritischen Zahlen". Wir wollen die Zahlen $\gamma(\xi)$ S($\mathfrak{G}$)-kritisch nennen.

Mit $\kappa(\mathfrak{x})$ ($\mathfrak{x} \geq 0$) hatten wir bereits die Folge der stark kritischen Zahlen bezeichnet. Nun definieren wir noch zur einfacheren Formulierung des nächsten Satzes:

$$\kappa(-1) := \omega.$$

Das abkürzende Zeichen $\mathfrak{x} \geq -1$ bedeute weiter, daß $\mathfrak{x}$ das Symbol -1 oder eine beliebige Ordinalzahl ist.

Wie leicht einzusehen, ist die kleinste Zahl $\mathfrak{x}_0$, für die $\mathfrak{G} < \kappa(\mathfrak{x}_0)$ gilt, keine Limeszahl. Da $\mathfrak{G}$ Limeszahl, ist außerdem $\mathfrak{G} \geq \kappa(-1)$. Es gibt somit genau ein $\pi \geq -1$, so daß gilt:

$$\kappa(\pi) \leq \mathfrak{G} < \kappa(\pi+1).$$

Satz 10. Es sei $\kappa(\pi) \leq \mathfrak{G} < \kappa(\pi+1)$ ($\pi \geq -1$) und $\gamma(\mathfrak{x})$ ($\mathfrak{x} \geq 1$) die Folge der S($\mathfrak{G}$)-kritischen Zahlen. Dann gilt:

$$\gamma(\mathfrak{x}) = \kappa(\pi + \mathfrak{x}) \quad \text{für } \mathfrak{x} \geq 1.$$

Beweis: Für $\mathfrak{x} \geq 1$ ist $\mathfrak{G}^{\kappa(\pi+\mathfrak{x})} = \kappa(\pi+\mathfrak{x})$ und damit nach Satz 5:

$$1\left[\begin{smallmatrix} \kappa(\pi+\mathfrak{x}) \\ 1 \end{smallmatrix}\right]\omega = \phi_{\mathfrak{G}^{\kappa(\pi+\mathfrak{x})}+1}(1, \omega) = \phi_{\kappa(\pi+\mathfrak{x})}(\omega, \omega) = \kappa(\pi+\mathfrak{x}),$$

also ist $\kappa(\pi+\mathfrak{x})$ S($\mathfrak{G}$)-kritisch.

Umgekehrt hat man $\phi_{\gamma(\mathfrak{x})}(\omega, \omega) \geq \gamma(\mathfrak{x}) = 1\left[\begin{smallmatrix} \gamma(\mathfrak{x}) \\ 1 \end{smallmatrix}\right]\omega = \phi_{\mathfrak{G}^{\gamma(\mathfrak{x})}}(\omega, \omega) \geq \phi_{\gamma(\mathfrak{x})}(\omega, \omega)$ und somit $\phi_{\gamma(\mathfrak{x})}(\omega, \omega) = \gamma(\mathfrak{x})$, d.h. $\gamma(\mathfrak{x})$ ist stark kritisch.

Schließlich gilt $\gamma(\mathfrak{x}) = \phi_{\mathfrak{G}^{\gamma(\mathfrak{x})}}(\omega, \omega) > \phi_{\mathfrak{G}}(\omega, \omega) \geq \phi_{\kappa(\pi)}(\omega, \omega) = \kappa(\pi)$, womit sich die Behauptung ergibt.

Das in [4] beschriebene System besitzt die Grundzahl $1[1,0]\omega = \kappa(0)$, kann also mit $S(\kappa(0))$ bezeichnet werden. Nach Satz 10 hat man:

Satz 11. Für die $S(\kappa(0))$ -kritischen Zahlen $\gamma(x)$ ($x \geq 1$) des SAARNIOSchen Systems $S(\kappa(0))$ gilt:

$$\gamma(x) = \kappa(x) \quad \text{für } x \geq 1.$$

Weiter erkennt man: Ist $\epsilon < \kappa(0)$, so ist $\gamma(x) = \kappa(-1+x)$ für $x \geq 1$, d.h.:

Für $\epsilon < \kappa(0)$ sind die $S(\epsilon)$ -kritischen Zahlen genau die stark kritischen Zahlen.

§6. Ein Operationensystem mit variabler Grundzahl

In den bisher betrachteten Systemen konnte die Grundzahl ϵ eine beliebige, jedoch feste Limeszahl sein. Wir wollen diesen Standpunkt nun noch verallgemeinern und ein System betrachten, das eine variable Grundzahl besitzt. Von Interesse ist dabei insbesondere der Fall, wo die Grundzahl an jeder Stelle die "größtmögliche" ist. Das soll heißen, daß in einem mehrstelligen Operationssymbol an jeder Stelle nur solche Zahlen stehen dürfen, die in dem induktiven Aufbau der Zahlen mittels der Folge der Operationen bereits erreicht sind (wodurch also die "Konstruktivität" des Symbolsystems gewährleistet wird). SAARNIO deutet am Schluß seiner Arbeit [4] die Möglichkeit eines solchen Systems an und nennt es "aufgebaut auf der progressiven Grundzahl". Es ist, um einige Beispiele zu nennen, zunächst

$$1\overset{2}{[1,0]}\omega = \lim_{n \in \omega} \overset{1}{\{n\}} \quad \text{mit} \quad \{0\} = \omega, \quad \{n+1\} = 1[\overset{1}{\{n\}}]\omega,$$

und dann weiter:

$$1\overset{2}{[2,0]}\omega = \lim_{n \in \omega} (1[\overset{2}{[1, \overset{1}{\{n\}}]]\omega) \quad \text{mit} \quad \{0\} = 1[\overset{2}{[1,0]}\omega, \quad \{n+1\} = 1[\overset{2}{[1, \overset{1}{\{n\}}]]\omega,$$

$$1\overset{3}{[1,0,0]}\omega = \lim_{n \in \omega} (1[\overset{3}{\{n, \overset{1}{\{0\}}]}\omega) \quad \text{mit} \quad \{0\} = 1[\overset{2}{[1,0]}\omega, \quad \{n+1\} = 1[\overset{2}{[\overset{1}{\{n\}}, 0]}\omega.$$

Allgemeine Rekursionsgleichungen für dieses Symbolsystem, das wir mit S^* bezeichnen, lassen sich auf folgende Weise angeben:

Es gelten die Gleichungen (27) - (30), (31) - (33), (34) und (35). Als Rekursionsanfänge hat man nun ($v_i \geq 1$):

$$(39) \quad 1[\overset{v_n}{\mathfrak{A}}_n, \dots, (\overset{v_1+1}{\mathfrak{A}}_1+1)]\omega = \lim_{m \in \omega} \{m, \\ \text{wobei } \{ \cdot \} = \omega, \quad \{m+1\} = 1[\overset{v_n}{\mathfrak{A}}_n, \dots, \overset{v_1+1}{\mathfrak{A}}_1, \{m\}]\omega$$

$$(40) \quad 1[\overset{v_n}{\mathfrak{A}}_n, \dots, (\overset{v_1+1}{\mathfrak{A}}_1+1)]\alpha = \lim_{\substack{\{ \cdot \} \in \omega \\ \{ \cdot \} < 1[\overset{v_n}{\mathfrak{A}}_n, \dots, (\overset{v_1+1}{\mathfrak{A}}_1+1)]\omega}} (1[\overset{v_n}{\mathfrak{A}}_n, \dots, \overset{v_1+1}{\mathfrak{A}}_1, \{ \cdot \}]\alpha)$$

$$(41) \quad 1[\overset{v_n}{\mathfrak{A}}_n, \dots, (\overset{v_1+1}{\mathfrak{A}}_1+1)]\alpha = \lim_{v_i < \overset{v_i}{\mathfrak{A}}_i} (1[\overset{v_n}{\mathfrak{A}}_n, \dots, \overset{v_1}{\mathfrak{A}}_1, v_i]\alpha), \\ \text{falls } v_i \text{ Limeszahl}$$

$$(42) \quad 1[\overset{v_n}{\mathfrak{A}}_n, \dots, \overset{v_1}{\mathfrak{A}}_1]\alpha = \lim_{\substack{\{ \cdot \} < \overset{v_i}{\mathfrak{A}}_i \\ \text{falls } v_i > 1 \text{ und } \overset{v_i}{\mathfrak{A}}_i \text{ Limeszahl}}} (1[\overset{v_n}{\mathfrak{A}}_n, \dots, \{ \cdot \}]\alpha),$$

Wie die vorangegangenen Systeme werden wir auch das System S^* mit dem System der Operationen ϕ_{μ} vergleichen, um dadurch das Konstruktionsprinzip dieser Art von mehrstelligen Operationen zu erhellen, und um die kritischen Zahlen von S^* zu bestimmen. Das Konstruktionsprinzip der Systeme $S(\epsilon)$ beruht, wie wir festgestellt haben, auf einer Polynomdarstellung der "Nummer" einer entsprechenden einstelligen Operation. Im System S^* wird nun eine Darstellung angewendet, die der Polynomdarstellung in einem gewissen Sinne ähnelt.

Wir gehen aus von einer beliebigen Normalfunktion g mit $g(0) > 0$. Mit g_v ($v \geq 0$) bezeichnen wir wie in §2 die Folge der Ableitungen von g . Es gilt zunächst:

Lemma 9. Ist g Normalfunktion mit $g(0) > 0$ und $\gamma \in Vg$, so gibt es eindeutig bestimmte Zahlen $\alpha \leq \gamma$ und $\eta < \gamma$ mit

$$\gamma = g_{\alpha}(\eta),$$

und zwar ist entweder

$$\gamma = g_{\gamma}(0)$$

oder

$$\gamma = g_{\alpha}(\gamma) \quad \text{mit } \alpha < \gamma.$$

Beweis: Die Lösungen der Gleichung $g_x(0) = x$ haben genau diese Darstellung. Sei also nun $\gamma \neq g_{\gamma}(0)$. Wegen $\gamma \in Vg$ gibt es β mit $\gamma = g(\beta)$ und $\beta < \gamma$. Ist $\beta < \gamma$, so ist bereits

$\gamma = g_0(\beta)$ eine gewünschte Darstellung von γ . Sei nun $\beta = \gamma$. Es gibt $\xi < \gamma$ mit $g_\xi(\gamma) \neq \gamma$, denn andernfalls wäre $g_\gamma(0) = \gamma$. Sei α die kleinste derartige Zahl ξ . Es ist $\alpha > 0$, $\gamma < g_\alpha(\gamma)$, und für $\alpha' < \alpha$ gilt $g_{\alpha'}(\gamma) = \gamma$, d.h. $\gamma \in V_{g_{\alpha'}}$. Es gibt also η mit $\gamma = g_\alpha(\eta)$, und es ist $\eta < \gamma$.

Damit ist die Existenz der angegebenen Darstellung bewiesen.

Nimmt man an, es ist $\gamma = g_{\alpha_1}(\eta_1) = g_{\alpha_2}(\eta_2)$, $\alpha_1 < \gamma$, $\alpha_2 < \gamma$, $\eta_1 < \gamma$, $\eta_2 < \gamma$ und $\alpha_1 < \alpha_2$, so folgt $g_{\alpha_1}(\eta_1) = g_{\alpha_2}(\eta_2) = g_{\alpha_1}(g_{\alpha_2}(\eta_2))$, also mit $\eta_1 = g_{\alpha_2}(\eta_2) = \gamma$ ein Widerspruch.

Damit erhält man die Eindeutigkeit der Darstellung.

In Analogie zur Polynomdarstellung von Ordinalzahlen gilt weiter:

Lemma 10. Ist g eine Normalfunktion mit $g(0) > 0$, so läßt sich jede Ordinalzahl $\gamma \geq g(0)$ eindeutig in der Form

$$\gamma = g_{\alpha_1}(g_{\alpha_2}(g_{\alpha_3}(\dots(g_{\alpha_n}(\eta_n) + \eta_{n-1}) + \dots) + \eta_2) + \eta_1) + \eta_0$$

darstellen mit $0 < n < \omega$, $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \gamma$,

$0 \leq \eta_n < g_{\alpha_{n+1}}(0)$, $0 \leq \eta_0 < g(\xi+1)$, wobei ξ bestimmt ist durch

$$g(\xi) = g_{\alpha_1}(g_{\alpha_2}(\dots + \eta_2) + \eta_1),$$

und $0 < \eta_i < g_{\alpha_{i+1}}(\xi+1)$ für $0 < i < n$, wobei ξ bestimmt ist durch

$$g_{\alpha_{i+1}}(\xi) = g_{\alpha_{i+1}}(g_{\alpha_{i+2}}(\dots(g_{\alpha_n}(\eta_n) + \eta_{n-1}) + \dots + \eta_{i+2}) + \eta_{i+1}).$$

Beweis: Zunächst gibt es eindeutig bestimmte Zahlen ξ_0 mit $g_0(\xi_0) \leq \gamma < g_0(\xi_0+1)$ und $\eta_0 < g_0(\xi_0+1)$ mit $\gamma = g_0(\xi_0) + \eta_0$.

$g_0(\xi_0)$ läßt sich nach Lemma 9 eindeutig in der Form

$g_0(\xi_0) = g_{\alpha_1}(\xi_1)$ mit $\alpha_1 \leq g_0(\xi_0)$ und $\xi_1 < g_0(\xi_0)$ darstellen.

Ist $\xi_1 < g_{\alpha_1+1}(0)$, so ist $\gamma = g_{\alpha_1}(\xi_1) + \eta_0$ die gewünschte

Darstellung von γ . Ist $\xi_1 \geq g_{\alpha_1+1}(0)$, so gibt es wie eben

eindeutig bestimmte Zahlen ξ_1' und η_1 mit $\eta_1 < g_{\alpha_1+1}(\xi_1'+1)$

und $\xi_1 = g_{\alpha_1+1}(\xi_1') + \eta_1$. Außerdem gilt $\eta_1 > 0$, denn bei $\eta_1 = 0$

wäre $g_0(\xi_0) = g_{\alpha_1}(\xi_1) = g_{\alpha_1}(g_{\alpha_1+1}(\xi_1')) = g_{\alpha_1+1}(\xi_1')$ eine

weitere Darstellung von $g_0(\xi_0)$, was nicht möglich ist.

Nach Lemma 9 läßt sich wiederum $g_{\alpha_1+1}(\xi_1')$ eindeutig darstellen

als $g_{\alpha_1+1}(\xi_1') = g_{\alpha_2}(\xi_2)$ mit $\alpha_1 < \alpha_2 \leq g_{\alpha_1+1}(\xi_1')$ und

$\xi_2 < \xi_{\alpha_1+1}(\xi_1')$. Man hat nun die Darstellung

$$\gamma = \xi_{\alpha_1}(\xi_{\alpha_2}(\xi_2) + \eta_1) + \eta_0.$$

Ist $\xi_2 \geq \xi_{\alpha_1+1}(0)$, so wendet man dasselbe Verfahren wie eben auf ξ_2 an. Es ist offenbar $\xi_1 > \xi_2 > \dots$. Auf diese Weise erhält man also nach endlich vielen Schritten die gewünschte eindeutige Darstellung

$$\gamma = \xi_{\alpha_1}(\xi_{\alpha_2}(\xi_{\alpha_3} \dots (\xi_{\alpha_n}(\eta_n) + \eta_{n-1}) + \dots + \eta_2) + \eta_1) + \eta_0$$

mit den oben angegebenen Nebenbedingungen.

Das Konstruktionsprinzip des Systems S^* beruht auf dieser eben beschriebenen Darstellung, wobei von der Normalfunktion κ der stark kritischen Zahlen ausgegangen wird. Wir bezeichnen also nun mit κ_α die Folge der Ableitungen von κ , insbesondere ist $\kappa_0 = \kappa$.

Satz 12. Mit den entsprechenden Nebenbedingungen wie in

Lemma 10 (und mit $\nu_i \geq 2, \nu_n \geq 1$) sei

$$\mu = \kappa_{-2+\nu_1}(\kappa_{-2+\nu_2}(\dots(\kappa_{-2+\nu_{n-1}}(\kappa_{-2+\nu_n}(-1+\nu_n) + \nu_{n-1}) + \dots) + \nu_2) + \nu_0.$$

Im SAARNIOSchen System S^* gilt dann für $\alpha \geq \omega$ und $\beta \geq 1$:

$$\text{a) } \beta[\overset{\nu_1}{\nu_n}, \dots, \overset{\nu_{n-1}}{\nu_2}, \overset{1}{\nu_0}]_\alpha = \phi_{\mu+1}(-1+\beta, \alpha),$$

falls ν_0 Nachfolgerzahl

$$\text{b) } \beta[\overset{\nu_1}{\nu_n}, \dots, \overset{\nu_{n-1}}{\nu_2}, \overset{1}{\nu_0}]_\alpha = \phi_{\mu+1}(\beta, \alpha),$$

falls $\nu_0 = 0$ oder ν_0 Limeszahl.

Beweis durch transfinite Induktion nach μ :

Wie bei Satz 9 haben wir auch hier nur die durch die Gleichungen (39) - (42) beschriebenen Rekursionsanfänge (mit $\nu_0 = 0$) zu betrachten.

Fall 1. $\nu_1 = \nu + 1, \nu_2 = \nu + 1, \nu \geq 0, \nu \geq 1$.

Fall 1.1. $\nu = 1$. Wir setzen zunächst $\alpha = \omega$ voraus. Es ist

$$\mu = \kappa_0(\kappa_{-2+\nu_2}(\dots) + \nu + 1). \text{ Sei } \xi = \kappa_0(\kappa_{-2+\nu_2}(\dots) + \nu) < \mu.$$

Für $m < \omega$ definieren wir Zahlen μ_m wie folgt:

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \xi + \omega \\ \mu_{m+1} &= \phi_{\mu_m}(\omega, \omega) \quad \text{für } m \geq 0. \end{aligned}$$

Es ist offensichtlich $\xi + \mu_m = \mu_m$ für $m \geq 1$.

Für $\mu' = \lim_{m < \omega} \mu_m$ gilt: $\Phi_{\mu'}(\omega, \omega) = \lim_{m < \omega} \Phi_{\mu_m}(\omega, \omega) = \lim_{m < \omega} \mu_{m+1} = \mu'$,
also $\mu' \in V\kappa$. Wegen $\mu' > \vartheta$ ist somit $\mu' \geq \mu$. Ferner ist
 $\mu_m < \mu$ für $m < \omega$, also $\mu' \leq \mu$ und folglich $\mu' = \mu$.

Nach Induktionsvoraussetzung bezüglich μ und mit Hilfe vollständiger Induktion nach m ist

$$\xi_1 = 1[\overset{2}{\vartheta}_n, \dots, \overset{2}{\vartheta}, \overset{1}{\omega}] \omega = \Phi_{\mu_0+1}(1, \omega) = \Phi_{\mu_0}(\omega, \omega) = \mu_1$$

$$\xi_{m+1} = 1[\overset{2}{\vartheta}_n, \dots, \overset{2}{\vartheta}, \xi_m] \omega = \Phi_{\vartheta+\xi_m+1}(1, \omega) = \mu_{m+1} \quad \text{für } m \geq 1.$$

Somit erhält man:

$$1[\overset{2}{\vartheta}_n, \dots, (\overset{2}{\vartheta}+1)] \omega = \lim_{m < \omega} \xi_m = \lim_{m < \omega} \mu_m = \mu = \Phi_{\mu}(\omega, \omega) = \Phi_{\mu+1}(1, \omega).$$

Für $\alpha > \omega$ ergibt sich nun:

$$\begin{aligned} 1[\overset{2}{\vartheta}_n, \dots, (\overset{2}{\vartheta}+1)] \alpha &= \lim_{\xi < \alpha} (1[\overset{2}{\vartheta}_n, \dots, \overset{2}{\vartheta}, \xi] \alpha) \\ &= \lim_{\xi < \Phi_{\mu+1}(1, \omega)} \Phi_{\vartheta+\xi+1}(1, \alpha) \\ &= \lim_{\xi < \mu} \Phi_{\xi}(\alpha, \alpha) = \Phi_{\mu}(\alpha, \alpha) = \Phi_{\mu+1}(1, \alpha). \end{aligned}$$

Fall 1.2. $v > 1$. Sei zunächst wieder $\alpha = \omega$. Es ist

$$\mu = \kappa_{-2+v+1}(\kappa_{-2+v_2}(\dots) + \vartheta + 1). \text{ Sei } \vartheta = \kappa_{-2+v+1}(\kappa_{-2+v_2}(\dots) + \vartheta) < \mu.$$

Für $1 \leq m < \omega$ definieren wir wieder Zahlen μ_m :

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \kappa_{-2+v}(\vartheta + \omega) = \Phi_{\mu_1}(\omega, \omega) \\ \mu_{m+1} &= \kappa_{-2+v}(\mu_m) = \Phi_{\mu_{m+1}}(\omega, \omega) \quad \text{für } m \geq 1. \end{aligned}$$

Es ist wieder $\vartheta + \mu_m = \mu_m$ für $m \geq 1$.

Sei $\mu' = \lim_{m < \omega} \mu_m$. Dann ist $\kappa_{-2+v}(\mu') = \lim_{m < \omega} \kappa_{-2+v}(\mu_m) = \mu'$,

also $\mu' \in V\kappa_{-2+v+1}$. Wegen $\mu' > \vartheta$ ist $\mu' \geq \mu$, und mit $\mu' \leq \mu$ ist $\mu' = \mu$. Wie oben erhält man nun:

$$\xi_1 = 1[\overset{2}{\vartheta}_n, \dots, \overset{2}{\vartheta}, \overset{v}{\omega}] \omega = \Phi_{\mu_1}(\omega, \omega) = \mu_1$$

$$\xi_{m+1} = 1[\overset{2}{\vartheta}_n, \dots, \overset{2}{\vartheta}, \xi_m] \omega = \Phi_{\kappa_{-2+v}(\vartheta+\xi_m)}(\omega, \omega) = \mu_{m+1} \quad \text{für } m \geq 1.$$

Damit erhält man wieder die Behauptung, die sich genauso wie bei 1.1. auf $\alpha > \omega$ vervollständigen läßt.

Fall 2. $\vartheta_1 = \vartheta + 1$, $\vartheta \geq 0$, v_1 Limeszahl. Bekanntlich ist

(vgl. [1], S. 44)

$$\kappa_{v_1}(\xi + 1) = \lim_{\vartheta_1' < \vartheta_1} \kappa_{v_1'}(\vartheta) \quad \text{für } \kappa_{v_1}(\xi) < \vartheta \leq \kappa_{v_1}(\xi + 1).$$

Sei $\eta = \kappa_{\eta_1}(\kappa_{\eta_2}(\dots) + \vartheta) + 1$. Dann ist also

$$\mu = \kappa_{\eta_1}(\kappa_{\eta_2}(\dots) + \vartheta + 1) = \lim_{\eta'_1 < \eta_1} \kappa_{\eta'_1}(\eta)$$

und somit:

$$1[\eta_1^{\eta_2}, \dots, (\vartheta + 1)]\alpha = \lim_{\eta'_1 < \eta_1} (1[\eta_1^{\eta_2}, \dots, \vartheta, 1]\alpha) = \lim_{\eta'_1 < \eta_1} \phi_{\kappa_{\eta'_1}(\eta) + 1}(1, \alpha) \\ = \phi_{\mu+1}(1, \alpha).$$

Fall 3. Sei η_1 Limeszahl. Für $\eta'_1 < \eta_1$ ist

$$\mu' = \kappa_{-\eta_1}(\dots + \eta'_1) < \kappa_{-\eta_1}(\dots + \eta_1) = \mu, \text{ also:}$$

$$1[\eta_1^{\eta_2}, \dots, \eta_1]\alpha = \lim_{\eta'_1 < \eta_1} (1[\eta_1^{\eta_2}, \dots, \eta'_1]\alpha) = \lim_{\mu' < \mu} \phi_{\mu'}(\alpha, \alpha) = \phi_{\mu+1}(1, \alpha).$$

Damit ist Satz 12 bewiesen.

Die Lösungen der Gleichung $1[1^x]\omega = x$ im System S^* nennen wir S^* -kritische Zahlen und kennzeichnen sie durch die Normalfunktion $\gamma^*(x)$. Die Gleichung $1[1^x]\omega = x$ ist nach dem eben Bewiesenen äquivalent mit der Gleichung $x = \phi_{\kappa_x(0)}(\omega, \omega) = \kappa_x(0)$. Es gilt also:

Satz 13. Die S^* -kritischen Zahlen sind genau die Lösungen der Gleichung $\kappa_x(0) = x$.

Ohne auf das von SCHÜTTE [5] aufgestellte System von Ordinalzahlen genauer einzugehen, wollen wir hier noch feststellen, welche Zahlen dieses Systems den S^* -kritischen Zahlen entsprechen. Geht man von der Normalfunktion $\varphi(x) = 1 + x$ aus, so gilt, wie man sich leicht überlegt:

$$\gamma^*(x) = \varphi \begin{pmatrix} x & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{in der Notation von [5], insbesondere}$$

$$\gamma^*(0) = \varphi \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad \text{Das ist, gemessen an dem System in [5] und anderen Systemen, eine relativ "sehr kleine" Zahl.}$$

§7. Darstellung von Ordinalzahlen

Wir wenden uns zum Schluß noch dem eigentlichen Zweck der SAARNIOSchen Operationen zu: Mit ihnen soll ein konstruktives Bezeichnungssystem für Ordinalzahlen der zweiten Zahlenklasse gebildet werden, in dem Sinne, daß eine Ordinalzahl mit Hilfe des Operationensystems durch kleinere Ordinalzahlen dargestellt wird. Dies ist jeweils nur für einen Abschnitt der zweiten Zahlenklasse möglich. Die erste Zahl, die in dem jeweiligen System nicht mehr durch kleinere Zahlen darstellbar ist, heiße Grenzzahl des Systems.

Als Vorbereitung betrachten wir wieder das System der Operationen ϕ_μ .

Satz 14. Sei $\kappa(x)$ eine stark kritische Zahl. Ist
 $\mu < \kappa(x), \beta < \kappa(x), \alpha < \kappa(x)$, so ist auch $\phi_\mu(\beta, \alpha) < \kappa(x)$.

Beweis: Für $\mu = 0$ oder $\alpha \leq 1$ ist die Aussage trivial. Sei also $\mu \geq 1$ und $\alpha > 1$ vorausgesetzt. Dann ist $\kappa(x) = \zeta_{\kappa(x)}(0)$ Hauptzahl von $\phi_{\mu+1}$ und daher:
 $\phi_\mu(\beta, \alpha) \leq \phi_{\mu+1}(\beta, \alpha) < \phi_{\mu+1}(\kappa(x), \alpha) = \kappa(x)$.

Satz 15. Zu jeder von 0 und ω verschiedenen Ordinalzahl γ , die nicht stark kritisch ist, gibt es Zahlen
 $\mu < \gamma, \beta < \gamma, \alpha < \gamma$ mit $\gamma = \phi_\mu(\beta, \alpha)$.

Beweis: γ kann als endliche Summe von additiven Hauptzahlen dargestellt werden. Erscheinen dabei mindestens zwei Summanden, so sind diese kleiner als γ , also gibt es eine gewünschte Darstellung von γ mittels der Operation ϕ_μ . Ist γ selbst additive Hauptzahl, so ist also $\gamma = \omega^x$. Für $x=0$ ist $\gamma = 1 = \phi_0(0,0)$, und für $x=1$ ist $\gamma = \omega$ nicht darstellbar. Sei nun $x > 1$, also $\gamma > \omega$. Bezeichnet f_μ wieder die Folge der Ableitungen der Normalfunktion $f_0(x) = \omega^x$, so gibt es nach Lemma 9 eindeutig Zahlen $\mu' < \gamma$ und $\eta < \gamma$ mit $\gamma = f_{\mu'}(\eta)$. Es ist auch $\mu = 2 + \mu' + 1 < \gamma$. Im Falle $\mu' = 0$ ist $\gamma = \phi_3(\eta, \omega)$, und falls μ' Limeszahl,

ist nach Satz 4 $\gamma = \phi_{\mu}(1 + \eta, \omega)$ eine gesuchte Darstellung. Falls μ' schließlich Nachfolgerzahl, so erhält man ebenfalls mit Satz 4: $\gamma = \phi_{\mu}(\omega \cdot (1 + \eta), \omega)$, und es ist $\omega \cdot (1 + \eta) < \gamma$, denn im Falle $\omega \cdot (1 + \eta) = \gamma$ wäre γ Hauptzahl von ϕ_{μ} , also $\gamma = \eta_{\mu'}(\xi) = f_{\mu'+1}(\xi)$, was der Eindeutigkeit von $\gamma = f_{\mu'}(\eta)$ widerspricht.

Nimmt man die beiden "nicht darstellbaren" Anfangszahlen der ersten und zweiten Zahlenklasse, 0 und ω , zu dem System der Operationen ϕ_{μ} als Grundsymbole hinzu, so ist nach den beiden eben bewiesenen Sätzen die kleinste stark kritische Zahl $\kappa(0)$ die erste Zahl, die sich in diesem Bezeichnungssystem nicht mehr durch kleinere Zahlen darstellen läßt: Die Grenzzahl des Systems der Operationen ϕ_{μ} ist die Zahl $\kappa(0)$.

Dieses Ergebnis läßt sich mit Hilfe von Satz 7 sofort auf die einstelligen SAARNIOSchen Operationen übertragen:

Satz 16. Für $\psi < \kappa(x)$, $\beta < \kappa(x)$, $\alpha < \kappa(x)$ ist auch $\beta[\psi]\alpha < \kappa(x)$. Zu jeder von 0, 1 und ω verschiedenen Ordinalzahl γ , die nicht stark kritisch ist, gibt es Zahlen $\psi < \gamma$, $\beta < \gamma$, $\alpha < \gamma$ mit $\gamma = \beta[\psi]\alpha$.

Beweis: Der erste Teil des Satzes ist trivial. Eine von 0, 1 und ω verschiedene, nicht stark kritische Zahl γ hat nach dem Beweis von Satz 15 eine Darstellung mittels der Operation ϕ_{μ} , oder sie ist additive Hauptzahl. Im ersten Fall läßt sie sich mit der Operation [1] darstellen. Im zweiten Fall hat γ die Darstellung

$$\begin{aligned} \gamma &= \phi_3(\eta, \omega) = \eta[3]\omega && \text{oder} \\ \gamma &= \phi_{\mu'+1}(1 + \eta, \omega) = (1 + \eta)[\mu']\omega && (\text{falls } \mu' \text{ Limeszahl}) \text{ oder} \\ \gamma &= \phi_{2\eta_{\mu'+1}}(\omega \cdot (1 + \eta), \omega) = (\omega \cdot (1 + \eta))[3 + \mu']\omega && (\text{falls } \mu' \text{ Nachfolgerzahl}). \end{aligned}$$

Die Grenzzahl des SAARNIOSchen Systems der einstelligen Operationen (mit den Grundsymbolen 0, 1, ω) ist demnach ebenfalls die Zahl $\kappa(0)$.

Bei der Behandlung der mehrstelligen Operationssysteme $S(6)$ sind wir von einer beliebigen Grundzahl 6 ausgegangen.

Da wir nun auf ein konstruktives Bezeichnungssystem Wert legen, kann $\mathfrak{G}$ nicht mehr beliebig gewählt werden. Es müssen nämlich alle Zahlen, die kleiner als $\mathfrak{G}$ sind, insbesondere bereits durch die einstelligen Operationen darstellbar sein. Damit erhält man die Forderung $\mathfrak{G} \leq \kappa(0)$.

Als Grenzzahl des Systems ergibt sich - analog wie eben - die erste kritische Zahl $\gamma(1)$ von $S(\mathfrak{G})$. Läßt man $\mathfrak{G} < \kappa(0)$ zu, so ist nach Satz 10 $\gamma(1) = \kappa(0)$. Man erhält also in diesem Falle dieselbe Grenzzahl wie schon bei den einstelligen Operationen, m. a. W.: Die Konstruktion der mehrstelligen Symbole führt nicht über den bereits durch die einstelligen Operationen erreichten Abschnitt hinaus. Da das wenig sinnvoll ist, wollen wir uns hier gleich auf den verbleibenden Fall $\mathfrak{G} = \kappa(0)$ beschränken und nur das System $S(\kappa(0))$, das ja auch in [4] beschrieben ist, betrachten.

Satz 17. Sei $1 \leq n < \omega$, $\gamma_i < \kappa(0)$ für $1 \leq i \leq n$, $x \geq 1$ und $\gamma_1 < \dots < \gamma_n < \kappa(x)$, $\beta < \kappa(x)$, $\alpha < \kappa(x)$. Dann ist im System $S(\kappa(0))$ auch $\beta[\gamma_n^{\vee}, \dots, \gamma_1^{\vee}] \alpha < \kappa(x)$.

Beweis: Es ist $\mu = \kappa(0)^{-1+\gamma_n} \cdot \gamma_n + \dots + \kappa(0)^{-1+\gamma_1} \cdot \gamma_1 < \kappa(x)$. Mit $\alpha' = \max(\alpha, \omega)$ hat man nach Satz 9 und Satz 14: $\beta[\gamma_n^{\vee}, \dots, \gamma_1^{\vee}] \alpha \leq \phi_{\mu+1}(\beta, \alpha') < \kappa(x)$.

Satz 18. Zu jeder von 0, 1, ω und den stark kritischen Zahlen $\kappa(x)$, $x \geq 1$, verschiedenen Ordinalzahl γ gibt es im System $S(\kappa(0))$ $1 \leq n < \omega$, $\gamma_i < \kappa(0)$ ($1 \leq i \leq n$), $\gamma_1 < \dots < \gamma_n < \gamma$, $\beta < \gamma$, $\alpha < \gamma$ mit $\gamma \doteq \beta[\gamma_n^{\vee}, \dots, \gamma_1^{\vee}] \alpha$.

Beweis: Wir betrachten wieder den Beweis von Satz 15. Trivial sind die Darstellungen mittels der Operationen ϕ_1 und ϕ_3 , ebenso wie die Darstellung $1[\overset{1}{1}, \overset{0}{0}] \omega$ von $\kappa(0)$. Andernfalls hat man $\gamma = \phi_{\mu'+1}(1 + \gamma, \omega)$ oder $\gamma = \phi_{2+\mu'+1}(\omega \cdot (1 + \gamma), \omega)$, je nachdem, ob μ' Limeszahl oder Nachfolgerzahl ist. μ' (bzw. $2 + \mu'$) läßt sich als Polynom $\kappa(0)^{-1+\gamma_n} \cdot \gamma_n + \dots + \kappa(0)^{-1+\gamma_1} \cdot \gamma_1$

darstellen, was auf $\gamma = (1 + \eta)[\overset{v_n}{\underset{v_n}{\mathcal{V}}}_n, \dots, \overset{v_1}{\underset{v_1}{\mathcal{V}}}_1] \omega$ bzw.
 $\gamma = (\omega \cdot (1 + \eta))[\overset{v_n}{\underset{v_n}{\mathcal{V}}}_n, \dots, \overset{v_1}{\underset{v_1}{\mathcal{V}}}_1] \omega$ führt.

Als Grenzzahl des SAARNIOSchen Operationensystems $S(\kappa(0))$ (mit den Grundsymbolen $0, 1, \omega$) erweist sich somit die stark kritische Zahl $\kappa(1)$. Durch die Konstruktion der mehrstelligen Symbole nach dem Prinzip der Polynombildung wird die Grenzzahl der einstelligen Operationen, die erste stark kritische Zahl $\kappa(0)$, überwunden und der konstruktiv erreichbare Ordinalzahlenabschnitt bis zur nächsten stark kritischen Zahl $\kappa(1)$ erweitert.

Erwähnen wollen wir noch folgendes: Man kann die Zeichen $\gamma(x)$ bzw. $\kappa(x)$ ($x \geq 1$) als neue Symbole zu dem System hinzunehmen und erhält dadurch Darstellungen für alle Zahlen, die kleiner sind als die erste kritische Zahl der Normalfunktion κ . In diesem Fall braucht man aber die ganze Konstruktion der mehrstelligen Operationen nicht, denn man kann dann ja auch noch $\kappa(0)$ hinzunehmen, und für alle nicht stark kritischen Zahlen hat man nach Satz 16 Darstellungen mit Hilfe der einstelligen Operationen, wenn man die "Nummern" der Operationen nur nicht durch $\kappa(0)$ begrenzt.

Schließlich wollen wir noch das System S^* mit variabler Grenzzahl betrachten.

Satz 19. Sei $\eta = \beta[\overset{v_n}{\underset{v_n}{\mathcal{V}}}_n, \dots, \overset{v_1}{\underset{v_1}{\mathcal{V}}}_1, \overset{1}{\underset{v_0}{\mathcal{V}}}_0] \alpha$ eine Zahl des Systems S^* und $\gamma^*(x)$ eine S^* -kritische Zahl. Ist $v_n < \gamma^*(x)$,
 $\beta < \gamma^*(x)$, $\alpha < \gamma^*(x)$, so ist auch $\eta < \gamma^*(x)$.

Beweis. $\gamma^*(x)$ ist eine Lösung der Gleichung $\kappa_\gamma(0) = y$. Entsprechend Lemma 10 und Satz 12 ist

$$\begin{aligned} \mu &= \kappa_{-2+v_n}(\kappa_{-2+v_n}(\dots(\kappa_{-2+v_{n-1}}(\kappa_{-2+v_n}(-1 + \overset{v_n}{\underset{v_n}{\mathcal{V}}}_n) + \overset{v_{n-1}}{\underset{v_{n-1}}{\mathcal{V}}}_{n-1}) + \dots) + \overset{v_1}{\underset{v_1}{\mathcal{V}}}_1) + \overset{v_0}{\underset{v_0}{\mathcal{V}}}_0) \\ &< \kappa_{-2+v_n}(\dots \kappa_{-2+v_{n-1}}(\kappa_{-2+v_n}(\kappa_{-2+v_n}(0)) + \overset{v_{n-1}}{\underset{v_{n-1}}{\mathcal{V}}}_{n-1}) + \dots) + \overset{v_0}{\underset{v_0}{\mathcal{V}}}_0 \\ &= \kappa_{-2+v_n}(\dots \kappa_{-2+v_{n-1}}(\kappa_{-2+v_n+1}(0) + \overset{v_{n-1}}{\underset{v_{n-1}}{\mathcal{V}}}_{n-1}) + \dots) + \overset{v_0}{\underset{v_0}{\mathcal{V}}}_0 \\ &< \kappa_{-2+v_n}(\dots \kappa_{-2+v_{n-1}}(\kappa_{-2+v_n+2}(0)) + \dots) + \overset{v_0}{\underset{v_0}{\mathcal{V}}}_0 \\ &= \kappa_{-2+v_n}(\dots \kappa_{-2+v_{n-2}}(0) + \dots) + \overset{v_0}{\underset{v_0}{\mathcal{V}}}_0 \\ &\dots \end{aligned}$$

...

$$< \kappa_{-2+\nu_n}(0) + \vartheta_0$$

$$< \kappa_{\gamma^*(x)}(0) = \gamma^*(x).$$

Der Rest des Beweises erledigt sich mit Hilfe von Satz 12 wie bei Satz 17.

Satz 20. Zu jeder von $0, 1, \omega$ verschiedenen Zahl γ , die nicht S^* -kritisch ist, gibt es im System S^* eine Darstellung

$$\gamma = \beta[\vartheta_n^1, \dots, \vartheta_1^1, \vartheta_0^1] \alpha \quad \text{mit} \quad \alpha < \gamma, \beta < \gamma, \nu_n < \gamma.$$

Beweis. Auch diesen Satz führen wir auf Satz 15 zurück. Der dort im Beweis auftretende Index μ' läßt sich nach Lemma 10 darstellen in der Form

$$\mu' = \kappa_{-2+\nu_n}(\dots(\kappa_{-2+\nu_n}(-1 + \vartheta_n) + \vartheta_{n-1}) + \dots + \vartheta_1) + \vartheta_0,$$

was auf die gewünschten Darstellungen führt. Ubrig bleiben allein die stark kritischen Zahlen $\kappa(x)$, die in Satz 15 nicht erfaßt werden. Für sie gilt $\kappa(x) = \phi_{\kappa(x)}(\omega, \omega) = \phi_{\kappa(x)+1}(1, \omega)$.

Für $\kappa(x)$ gibt es ebenfalls eine Darstellung

$$\kappa(x) = \kappa_{-2+\nu_n}(\dots(\kappa_{-2+\nu_n}(-1 + \vartheta_n) + \vartheta_{n-1}) + \dots + \vartheta_1),$$

was auf $\kappa(x) = 1[\vartheta_n^1, \dots, \vartheta_1^1, 0]\omega$ führt.

Die Grenzzahl des Operationensystems S^* (mit den Grundsymbolen $0, 1, \omega$) ist daher die erste S^* -kritische Zahl $\gamma^*(0)$, d.i. die kleinste Lösung der Gleichung $\kappa_x(0) = x$.

Das Konstruktionsprinzip der mehrstelligen Operationen im System S^* führt also in wesentlicherem Maße über die einstellig erreichbare Zahl $\kappa(0)$ hinaus, als dies beim System $S(\kappa(0))$ der Fall ist. Dennoch ist auch dieses stärkste SAARNIOSche System verhältnismäßig schwach gegenüber anderen bekannten Systemen. Insbesondere ist es auch schwächer als das VEBLEN-System [7], dem es, oberflächlich betrachtet, zu ähneln scheint. Wie schon erwähnt, ist

$\gamma^*(0) = \psi \binom{3}{2}$ in der Notation von [5], was der VEBLENSchen Schreibweise $\psi(1, 1_2, 3_3)$ entspricht.

Literaturverzeichnis

- [1] BACHMANN, H., Transfinite Zahlen, Berlin-Heidelberg-New York 1967 (2. Aufl.).
- [2] FINSLER, P., Eine transfinite Folge arithmetischer Operationen, Comment. Math. Helv. 25 (1951), 75 - 90.
- [3] LEVITZ, H., Über die FLINSLERSchen höheren arithmetischen Operationen, Comment. Math. Helv. 41 (1966-67), 273 - 286.
- [4] SAARNIO, U., Über die Positionsdarstellung der Ordnungszahlen der Cantorsche zweiten Zahlenklasse, Math. Z. 100 (1967), 396 - 413.
- [5] SCHÜTTE, K., Kennzeichnung von Ordnungszahlen durch rekursiv erklärte Funktionen, Math. Ann. 127 (1954), 15 - 32.
- [6] SCHÜTTE, K., Predicative well-orderings, Formal Systems and Recursive Functions, Amsterdam 1965.
- [7] VEBLEN, O., Continuous increasing functions of finite and transfinite ordinals, Trans. Amer. Math. Soc. 2 (1908), 280 - 292.

Lebenslauf

Name: Fred Kröger

Geburtstag: 12. Januar 1945

Geburtsort: Schroda/Wartheland

Bekenntnis: evang.-luth.

Eltern: Klaus Kröger
Katharina Kröger, geb. Kerkovius

Ausbildung: 1951 - 1955 Volksschule Rudelzhausen
1955 - 1960 Realschule Mainburg
1960 - 1964 Christoph-Scheiner-
Oberrealschule Ingolstadt
1964 - 1969 Ludwig-Maximilians-
Universität München

Beschäftigung: seit 1968 Hilfsassistent,
Ludwig-Maximilians-
Universität München

